مبادئ الرياضيات

لطلبة الإقتصاد والعلوم الإدارية

تأليف:
د. محمد القاضي
أ. أحمد أبوبكر

مكتبة الرشد
ناشـــــرون

المقدمة

الحمد لله والصلاة على المصطفى محمد صلى الله عليه وسلم وبعد :

إن الطلاب والطالبات في كليات الاقتصاد والإدارة والعلوم الاجتماعية يحتاجون إلى كتاب في مبادئ الرياضيات يغطي بأسلوب مبسط وغير مخل المواضيع الأساسية في الرياضيات التي يستخدمونها في دراستهم المستقبلية في مجال تخصصاتهم ومع إدراكنا لوجود عدة كتب ألفت بالعربية أو ترجمت من لغات أخرى لهذا الغرض إلا أنه من خلال خبرتنا في تدريس مقرر (مبادئ الرياضيات) لطلبة كلية الاقتصاد والعلوم الإدارية بجامعة الإمام محمد بن سعود الإسلامية رأينا أن الحاجة ملحة لتأليف كتاب مناسب لهذا المقرر يراعى فيه اختلاف خلفيات الطلاب العلمية في مراحل التعليم العام حيث أن بعضهم من خريجي الثانوية (علمي) والبعض الأخر من خريجي الثانوية (أدبي) إضافة إلى خريجي المعاهد العلمية مما يتطلب طريقة عرض ومحتوى خاص يراعى فيه تعزيز الخلفية العلمية الضعيفة لدى الفئتين الأخيرتين مع تحاشي إدخال الرتابة والملل على الفئة الأولى . ونأمل أن يكون في ما بذلناه من جهد وفكر في هذا الكتاب ما يحقق الأهداف المرجوة كما نرجو من كل من لديه ملحوظات أو اقتراحات مراسلتنا مشكوراً على البريد الإلكتروني a_abubaker2000@yahoo.com .

والله نسأل التوفيق والسداد في العمل

المولفان

1429/5/1هـ

المحتوى

الله

بسم الله الرحمن الرحيم

الفصل الأول
أساسيات الجبر

(1 – 1) المجموعات

(1 – 2) جبر المجموعات

تمارين

(1 – 3) الخواص الحسابية لمجموعة الأعداد الصحيحة

(1 – 4) مجموعة الأعداد النسبية

(1 – 5) مجموعة الأعداد الغير نسبية

(1 – 6) مجموعة الأعداد الحقيقية

(1 – 7) القيمة المطلقة

تمارين

(1 – 8) القوى و الأسس

(1 – 9) الجذور

(1 – 10) اللوغاريتمات

تمارين

أساسيات الجبر

(1 – 1) المجموعات:

المجموعة هي مجموعة من الأشياء الحسية أو المعنوية التي يمكن تحديدها بدقة وتدعى هذه الأشياء عناصر المجموعة ، وتُكتب المجموعة بوضع عناصرها داخل أقواس حاضنة على الشكل { } ويرمز للمجموعة عادة بحروف انجليزية كبيرة مثل $A, B, C, D, ...$. فمثلاً يمكن كتابة المجموعة التي عناصرها $1,2,3,4$ بالشكل $\{1,2,3,4\}$ ونرمز لها بالرمز A أي أن $A = \{1,2,3,4\}$.

وسنذكر تعريف بعض مجموعات الأعداد الشهيرة مع ذكر رمزها المتعارف عليه.

مجموعة الأعداد الطبيعية: ويرمز لمجموعة الأعداد الطبيعية بالرمز $\mathbb{N}$ وهي:

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, ...\} .$$

مجموعة الاعداد الكلية: وهي مجموعة الأعداد الطبيعية مضافاً إلى الصفر ويرمز لها بالرمز W أي أن:

$$W = \{0, 1, 2, 3, 4, ...\} .$$

مجموعة الأعداد الصحيحة: ويرمز لمجموعة الأعداد الصحيحة بالرمز $\mathbb{Z}$ وتشمل W إضافة إلى سالب الأعداد الطبيعية وتكون على الصورة :

$$\mathbb{Z} = \{..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...\} .$$

<u>الإنتماء:</u>

نستخدم الرمز $\in$ ويقرأ (ينتمي) للتعبير عن وجود عنصر في المجموعة .

على سبيل المثال: $2 \in \mathbb{N}$ يقرأ 2 ينتمي للمجموعة $\mathbb{N}$. والرمز $\notin$ هو نقيض للرمز $\in$ فمثلا $-1 \notin \mathbb{N}$ يعني أن العنصر 1- ليس عنصرا في المجموعة $\mathbb{N}$ ، وتقرأ (العنصر 1- لا ينتمي للمجموعة $\mathbb{N}$) .

المجموعة الجزئية:

نقول عن مجموعة B أنها مجموعة جزئية من مجموعة A ، إذا كانت عناصر B هي عناصر في A ونعبر عن ذلك بالرمز $B \subseteq A$ كما نقول في هذه الحالة أن A تحوي B . وإذا كانت A تحوي B ولا تساويها نعبر عن ذلك بالرمز $B \subset A$ ونقول أن B مجموعة جزئية فعلية من A . على سبيل المثال: إذا كانت $B = \{2,3\}$ و $A = \{1,2,3,4\}$ ، فإن $B \subset A$. لاحظ ان لأي مجموعة A فإن $A \subseteq A$.

المجموعة الخالية:

المجموعة التي لاتحوي على عناصر تسمى المجموعة الخالية ويرمز لها بالرمز ϕ أو بالرمز $\{\ \}$.

طرق التعبير عن المجموعات:

هناك ثلاث طرق في وصف أو تحديد مجموعة:

(1) طريقة كتابة العناصر:

وفي هذه الطريقة يتم كتابة جميع عناصر المجموعة داخلها حيث تستخدم هذه الطريقة عندما يكون عدد عناصر المجموعة محدود وقليل .

مثال (1):

أكتب عناصر المجموعات التالية:

1. A هي مجموعة أول خمسة أعداد صحيحة فردية موجبة.
2. B هي مجموعة الأعداد الصحيحة المحصورة بين العددين -2 , 5 .

الحل:

1. $A = \{1,3,5,7,9\}$.

2. $B = \{-1,0,1,2,3,4\}$.

(2) طريقة الصفة المميزة:

وفي هذه الطريقة لايتم كتابة عناصر المجموعة بذاتها ولكن يتم كتابة صفة لاتنطبق إلا على عناصر هذه المجموعة. وهذه الطريقة هي الاكثر فعالية في وصف المجموعات وخصوصاً إذا كان عدد عناصر المجموعة كبيراً جداً أو غير منتهي.

والشكل العام لهذه الطريقة هو:

$$A = \{\, x \mid x \text{ الخصائص التي تحدد } \,\} .$$

إذا كانت المجموعة A مجموعة جزئية من مجموعة معروفة T ولها صفات معينة فإننا نكتب المجموعة A بالشكل التالي:

$$A = \{\, x \in T \mid x \text{ الخصائص التي تحدد } \,\} .$$

ولتوضيح ذلك نعتبر المجموعة $A = \{x \in \mathbb{N} \mid x + 2 = 5\}$ والتي تقرأ A هي المجموعة الجزئية من $\mathbb{N}$ التي يحقق كل عنصر x فيها المعادلة $x + 2 = 5$. وواضح أن A تحوي العنصر 3 فقط .

مثال (2):

أكتب المجموعات التالية بطريقة الصفة المميزة:

1. A هي مجموعة الأعداد الطبيعية الفردية.

2. B هي مجموعة الأعداد الطبيعية الزوجية.

3. C هي مجموعة الأعداد الصحيحة المحصورة بين العددين -20 , 55.

الحل:

1. $A=\{x\in\mathbb{N}\mid$ حيث x عدد فردي $\}$.

كما يمكن كتابة المجموعة A بالصورة التالية:

$$A=\{2x-1\mid x\in\mathbb{N}\}.$$

2. $B=\{x\in\mathbb{N}\mid$ حيث x عدد زوجي $\}$.

كما يمكن كتابة المجموعة B بالصورة التالية:

$$B=\{2x\mid x\in\mathbb{N}\}.$$

3. $C=\{x\in\mathbb{Z}\mid -20<x<55\}$.

كما يمكن كتابة المجموعة C بالصورة التالية:

$$C=\{x\in\mathbb{Z}\mid 0<20+x<75\}.$$

(3) طريقة التسلسل النمطي:

وفي هذه الطريقة يتم كتابة بعض العناصر على نمط معين بحيث يسهل على القارئ تخيل باقي العناصر، وهي من الطرق المهمة إذا كان عدد العناصر كبير جداً أو غير منتهي وله نمط معين. فعلى سبيل المثال لكتابة الأعداد الفردية الموجبة بطريقة التسلسل النمطي فإننا نكتب $A=\{1,3,5,7,\ldots\}$. وإذا أردنا كتابة الأعداد الفردية المحصورة بين العددين 2 , 100 فإننا نكتب $A=\{3,5,7,\ldots,97,99\}$ وتدل النقاط الثلاث (...) داخل المجموعة على أن الأعداد تستمر بنفس نمط الأعداد المكتوبة.

مثال (3):

أكتب المجموعات التالية بطريقة التسلسل النمطي:

1. $A = \{x \in \mathbb{N} |$ عدد زوجى $x \}$.

2. $B = \{10x \mid x \in \mathbb{N}\}$.

الحل:

1. $A = \{2,4,6,8,\ldots\}$.

2. $B = \{10,20,30,40,\ldots\}$.

(1 – 2) جبر المجموعات:

سندرس بعض العمليات الجبرية على المجموعات وتمثيلها بأشكال فن:

<u>الاتحاد:</u>

لتكن A و B مجموعتين، فإن اتحاد هاتين المجموعتين هي مجموعة جديدة تحتوي على عناصر المجموعتين، ونرمز لاتحاد المجموعتين A و B بالرمز $A \cup B$ ، ونعرف الاتحاد كما يلي:

$$A \cup B = \{ x \mid x \in A \text{ أو } x \in B \} .$$

وحرف العطف (أو) في التعريف أعلاه هو بمعناه الواسع أي x ينتمي على الاقل لإحدى المجموعتين A و B .

خصائص الاتحاد:

إذا كان A و B أي مجموعتين فإن:

1. $A \cup B = B \cup A$.
2. $A \cup A = A$.
3. $A \cup \phi = A$.

مثال (4):

إذا كانت $A = \{1,2,4,7\}$ و $B = \{2,5,7,9\}$ أوجد $A \cup B$.

الحل:

$$A \cup B = \{1,2,4,5,7,9\} .$$

التقاطع:

لتكن A و B مجموعتين، فإن تقاطع هاتين المجموعتين هي مجموعة جديدة تحتوي على العناصر المشتركة من المجموعتين، ونرمز لتقاطع المجموعتين A و B بالرمز $A \cap B$ ، ونعرف التقاطع كما يلي:

$$A \cap B = \{ x \mid x \in A \ , \ x \in B \} .$$

مثال (5):

إذا كانت $A = \{3,5,9,12,17\}$ و $B = \{1,4,5,8,9,10,11,12\}$ أوجد $A \cap B$.

الحل:

$$A \cap B = \{5,9,12\} .$$

خصائص التقاطع:

إذا كان A و B أي مجموعتين فإن:

1. $A \cap B = B \cap A$.
2. $A \cap A = A$.
3. $A \cap \phi = \phi$.

مثال (6):

إذا كانت $A = \{0,4,5,9\}$ و $B = \{-1,0,2,5\}$ و $C = \{-2,-1,0,4\}$ أوجد مايلي:

1. $A \cup B$.
2. $B \cap C$.
3. $(A \cup B) \cap C$.
4. $(B \cap C) \cup A$.

الحل:

1. $A \cup B = \{-1,0,2,4,5,9\}$.
2. $B \cap C = \{-1,0\}$.
3. $A \cup B = \{-1,0,2,4,5,9\} \quad \Rightarrow \quad (A \cup B) \cap C = \{-1,0,4\}$.
4. $B \cap C = \{-1,0\} \quad \Rightarrow \quad (B \cap C) \cup A = \{-1,0,4,5,9\}$.

المجموعة الشاملة والمتممة:

عادة في كل دراسة معينة يوجد مجموعة تحت الإعتبار لانخرج عنها نسميها المجموعة الشاملة، ونرمز لها عادة يرمز لها بالحرف U . فعلى سبيل المثال مجموعة خانات الأعداد في لوحات السيارات هي $U=\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ ، وتعتبر المجموعة الشاملة للمجموعات الثلاث $A=\{1,2,5\}$ و $B=\{0,2,3,4\}$ و $C=\{5,6,7,8\}$. وبالتالي نرى أن المجموعة الشاملة تحتوي على عناصر المجموعات A و B و C ، وأن كلاً من هذه المجموعات تكون محتواة في المجموعة الشاملة U .

المجموعة المتممة:

لتكن U مجموعة شاملة و $A\subseteq U$ فإن متممة A هي مجموعة العناصر التي تنتمي إلى U ولاتنتمي إلى A ونرمز لمتممة A بالرمز A^c وتعرف كما يلي:

$$A^c=\{\, x\in U \mid x\notin A\,\} .$$

خصائص المجموعة الشاملة والمتممة:

لتكن U مجموعة شاملة وأن $A\subseteq U$ فإن:

1. $U\cup A=U$.
2. $A^c\cup A=U$.
3. $A^c\cap A=\phi$.
4. $U\cap A=A$.
5. $U^c=\phi\ ,\ \phi^c=U$.

مثال(7):

لتكن $U=\{1,2,\dots,10\}$ و $A=\{3,4,5,6\}$ و $B=\{2,3,4,5,8,10\}$ أوجد مايلي:

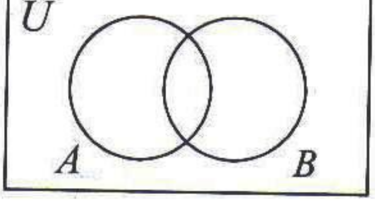
1. A^c .
2. B^c .
3. $(A\cup B)^c$.
4. $(A\cap B)^c$.

الحل:

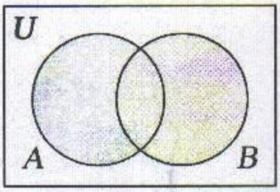
1. $A^c=\{1,2,7,8,9,10\}$.
2. $B^c=\{1,6,7,9\}$.
3. $A\cup B=\{2,3,4,5,6,8,10\} \quad \Rightarrow \quad (A\cup B)^c=\{1,7,9\}$.
4. $A\cap B=\{3,4,5\} \quad \Rightarrow \quad (A\cap B)^c=\{1,2,6,7,8,9,10\}$.

<u>أشكال فن:</u>

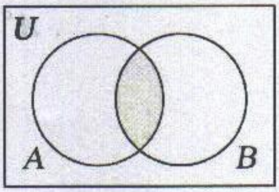
إن من أهم الطرق في توضيح المجموعات والعمليات عليها استخدام ما يسمى بأشكال فن، حيث تمثل المجموعة الشاملة U بمستطيل ونرسم داخله دوائر تمثل المجموعات الواقعة داخل المجموعة الشاملة U ، فمثلاً الشكل التالي يمثل تقاطع مجموعتين A و B داخل U .



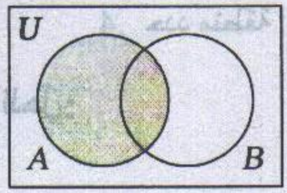
وفيما يلي أشكال ڤن لبعض العمليات على المجموعات :



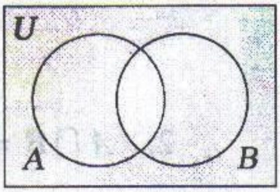
$A \cup B$



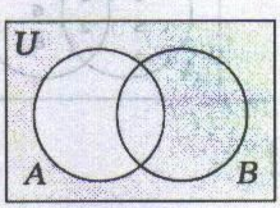
$A \cap B$



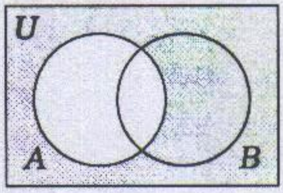
A



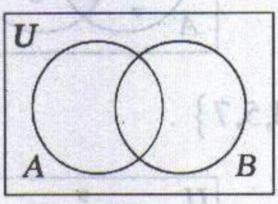
$A^c \cup B^c$



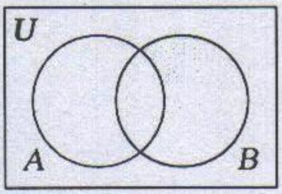
$A^c \cup B$



A^c



$A^c \cap B^c$



$A^c \cap B$

مثال (8):

لتكن $U = \{0,1,2,3,\ldots,9\}$ و $A = \{0,1,2,3,5,7\}$ و $B = \{0,2,4,6,8\}$:

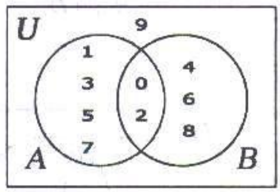
1. مثل هذه المجموعات بأشكال ڤن.
2. حدد منطقة $A \cap B$.

3. حدد منطقة $A \cap B^{c}$.

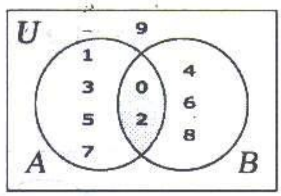
4. حدد منطقة $A^{c} \cup B^{c}$.

الحل:

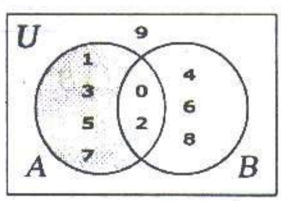
1.



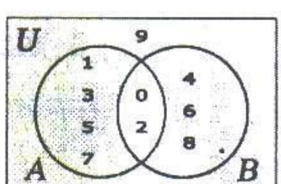
2. $A \cap B = \{0,2\}$.



3. $A \cap B^{c} = \{1,3,5,7\}$.



4. $A^{c} \cup B^{c} = \{1,3,4,5,6,7,8,9\}$.



تمارين

1. أي من العبارات التالية صحيحة و أيها خاطئة:

a) $0 \in W$.
b) $\mathbb{N} \subset W$.
c) $\mathbb{Z} \subset \mathbb{N}$.
d) $\mathbb{N} \cup W = W$.
e) $-1.5 \in \mathbb{Z}$.
f) $-2 \in W$.

2. لـــتكن $U = \{-5,-4,-3,-2,-1,0,1,2,3,4,5\}$ و $A = \{-4,-2,0,2,4\}$
و $B = \{-2,-1,0,1,2\}$ و $C = \{-3,-1,0,1,3\}$ و أوجد مايلي:

a) A^c .
b) B^c .
c) C^c .
d) $A \cup A^c$.
e) $B \cap B^c$.
f) $A \cap B^c$.
g) $B^c \cup C$.
h) $B^c \cup C^c$.
i) $A \cup B \cup C$.
j) $A \cap B \cap C$.

k) $(A \cap C) \cup B$. l) $(A \cup B) \cap C^c$.

m) $(A \cap B) \cup (A \cap C)$. n) $(A \cup B) \cap (A^c \cup C)$.

o) $U \cap (B \cup C)$. p) $U \cap (A \cup B)^c$.

3. لتكن $U = \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ و $A = \{3,4,5,6,7\}$ و $B = \{0,1,2,3,4\}$:

a) مثل المجموعات بأشكال فن . b) حدد منطقة A^c .

c) حدد منطقة B^c . d) حدد منطقة $A \cap B$.

e) حدد منطقة $A \cup B$. f) حدد منطقة $A^c \cap B^c$.

g) حدد منطقة $A^c \cap B$. h) حدد منطقة $A \cup B^c$.

4. عبر عن كل مجموعة مما يلي بطريقة كتابة العناصر:

a) A هي مجموعة الأعداد الصحيحة المحصورة بين العددين -9 , 1 .

b) B هي مجموعة مضاعفات العدد 5 الواقعة بين العددين 7 , 36 .

c) C هي مجموعة الأعداد الزوجية الموجبة المحصورة بين العددين 4 , 17 .

d) $D=\{x^2 \mid 0<x<6\ ,\ x\in\mathbb{Z}\}$.

5. عبر عن كل مجموعة مما يلي بطريقة الصفة المميزة:

a) A هي مجموعة الأعداد الصحيحة المحصورة بين العددين 3− , 2 .

b) B هي مجموعة الأعداد الطبيعية لمضاعفات العدد 4 .

c) C هي مجموعة الأعداد الطبيعية أقل من 50 .

6. عبر عن كل مجموعة مما يلي بطريقة التسلسل النمطي:

a) $A=\{x-4 \mid x\in\mathbb{N}\}$.

b) $B=\{x^2 \mid x\in\mathbb{N}\}$.

c) $C=\{x\in\mathbb{Z} \mid -4<x<100\}$.

(1 – 3) الخواص الحسابية لمجموعة الأعداد الصحيحة:

ذكرنا سابقاً أن مجموعة الأعداد الصحيحة هي $\mathbb{Z}=\{\dots,-3,-2,-1,0,1,2,3,\dots\}$ وسندرس الآن الخواص الحسابية هذه المجموعة.

ليكن $n,k\in\mathbb{Z}$ ، إذا كانت n موجبة فإن nk هو المضاعف النوني للعدد k :

$$nk=\underbrace{k+\cdots+k}_{n\ \text{مرة}}$$

نعمم ذلك في حالة $n=0$ فنسمي $nk=0$ المضاعف الصفري، وكذلك في حالة n سالبة فبملاحظة أن $m=-n$ عدد موجب فإننا نجد أن:

$$nk=(-m)k=m(-k)=\underbrace{(-k)+(-k)+\cdots+(-k)}_{m\ \text{مرة}}$$

أي أن nk هو المضاعف الميمي $m(-k)$ للعدد $(-k)$ ، ونسميه أيضاً المضاعف النوني nk للعدد k . فمثلاً $3(-2)$ هو المضاعف الـ (-2) للعدد 3 ويساوي $(-2)3=(-3)+(-3)=-6$. وبذلك نصل إلى تعريف مجموعة مضاعفات عدد صحيح.

<u>مجموعة مضاعفات عدد صحيح:</u>

لتكن $k\in\mathbb{Z}$. نعرف مضاعفات العدد الصحيح k بانها المجموعة M_k حيث:

$$M_k=\{nk\mid n\in\mathbb{Z}\}=\{0,\pm k,\pm 2k,\pm 3k\dots\}\ .$$

خصائص مجموعة المضاعفات:

ليكن $k \in \mathbb{Z}$ عندئذٍ:

1. **إذا كان $k \neq 0$ فإن M_k مجموعة غير منتهية.**
2. **إذا كان $k = 0$ فإن $M_k = \{0\}$.**

مثال (9):

أكتب كل من M_3 و M_5 و M_{-4} .

الحل:

$$M_3 = \{0, \pm3, \pm6, \pm9, \pm12, \ldots\} .$$

$$M_5 = \{0, \pm5, \pm10, \pm15, \pm20, \ldots\} .$$

$$M_{-4} = \{0, \pm4, \pm8, \pm12, \pm16, \ldots\} .$$

تعريف قابلية القسمة:

إذا كان العدد b مضاعف للعدد a حيث $a \neq 0$ فإن ناتج القسمة $\left(b \div a = \frac{b}{a}\right)$ هو عدد صحيح دون باقي . في هذه الحالة نقول أن العدد b يقبل القسمة على a وبعبارة أخرى نقول أن العدد a قاسم للعدد b .

أحياناً نصف العدد a بأنه عامل من عوامل b . فمثلاً العدد 20 يقبل القسمة على 4 لأن العدد 20 من مضاعفات العدد 4 وبذلك فإن 4 عامل من عوامل 20 .

مجموعة قواسم عدد صحيح:

ليكن $a,b \in \mathbb{Z}$ ، و $a \neq 0$ نقول أن a قاسم للعدد b أو b يقبل القسمة على a (ونكتب ذلك رمزياً $a|b$) إذا كان b من مضاعفات العدد a أي إذا كان $b = na$ حيث n عدد صحيح. وإذا لم يكن a يقسم العدد b فإننا نعبر عن ذلك رمزياً $a \nmid b$. ونرمز لمجموعة قواسم العدد b بالرمز D_b حيث:

$$D_b = \{a \in \mathbb{Z} \mid a|b\} .$$

لاحظ لأي $a \neq 0$ فإن $a|0$.

خصائص مجموعة القواسم:

إذا كان $a \in \mathbb{Z}$ فإن:

1. **إذا كان $a \neq 0$ فإن D_a مجموعة منتهية.**
2. **إذا كان $a = 0$ فإن $D_a = \mathbb{Z} - \{0\}$.**

مثال (10):

$2|8$ أي أن العدد 2 قاسم للعدد 8 (أو 8 يقبل القسمة على 2) لأنه يوجد عدد صحيح وهو 4 بحيث $8 = 4 \times 2$. بينما $5 \nmid 9$ أي أن العدد 5 لا يعتبر قاسم للعدد 19 (أو 19 لا يقبل القسمة على 5) لأنه لا يوجد عدد صحيح n بحيث $19 = n \times 5$.

نظرية:

لتكن $a,b,c \in \mathbb{Z}$ فإن:

1. $1|a$ و $a|a$ و $a|0$ ولكن $0 \nmid a$ لأي عدد صحيح $a \neq 0$.
2. إذا كان $a|b$ فإن $a|-b$.
3. إذا كان $a|b$ و $b|a$ فإما $a=b$ أو $a=-b$.
4. إذا كان $a|b$ و $b|c$ فإن $a|c$.
5. إذا كان $a|b$ فإن $ac|bc$ لكل $c \neq 0$.
6. إذا كان $a|b$ و $a|c$ فإن $a|(b \pm c)$.

مثال (11):

أوجد كلاً من D_5 و D_6 .

الحل:

$D_5 = \{\pm1, \pm5\}$.

$D_6 = \{\pm1, \pm2, \pm3, \pm6\}$.

اختبارات قابلية القسمة:

في البداية ننبه الطالب على التفريق بين كلمة رقم وهو الرمز المكتوب في خانة معينة. وكلمة عدد التي يمثل برقم واحد أو أكثر. فمثلاً العدد 45 أرقامه 4 و 5 .

قابلية القسمة على 2 :

يقبل العدد الصحيح القسمة على العدد 2 فقط عندما يكون رقم آحاده أحد الأرقام التالية 0,2,4,6,8 . ويسمى العدد في هذه الحالة عدداً زوجياً، فمثلاً: كلاً من الأعداد 350 و 122 و 508 تقبل القسمة على العدد 2 . بينما الأعداد 651 و 745 و 23 لا تقبل القسمة على العدد 2 .

قابلية القسمة على 3 :

يقبل العدد الصحيح القسمة على العدد 3 فقط عندما يكون مجموع أرقامه يقبل القسمة على 3 .

مثال (12):

العدد 12432 يقبل القسمة على 3 لأن:

$$1+2+4+3+2=12=3\times 4 \ .$$

أي أن مجموع أرقام العدد 12432 هو 12 يقبل القسمة على 3 .

مثال (13):

العدد 1222 لا يقبل القسمة على 3 لأن:

$$1+2+2+2=7 \ .$$

أي أن مجموع أرقام العدد 1222 هو 7 لا يقبل القسمة على 3 .

قابلية القسمة على 4 :

يقبل العدد الصحيح القسمة على العدد 4 فقط عندما يكون العدد الناتج من رقمي آحاده وعشراته يقبل القسمة على 4 . فمثلاً العدد 512 يقبل القسمة على 4 لأن العدد 12 يقبل القسمة على 4 . بينما العدد 122 لا يقبل القسمة على 4 لأن 22 لا يقبل القسمة على 4 .

قابلية القسمة على 5 :

يقبل العدد الصحيح القسمة على 5 فقط عندما يكون رقم آحاده 0 أو 5 . فمثلاً العدد 15 5515 و العدد 340 يقبلان القسمة على 5 لأن أحاديهما الرقمين 5 و 0 على التوالي. بينما العدد 204 لا يقبل القسمة على 5 لأن آحاده 4 .

قابلية القسمة على 6 :

يقبل العدد الصحيح القسمة على 6 فقط إذا كان يقبل القسمة على 2 و 3 في آن واحد. أي إذا كان آحاده زوجياً ومجموع أرقامه يقبل القسمة على 3 . فمثلاً العدد 4365 يقبل القسمة على 6 لأن آحاده 4 يقبل القسمة على 2 ومجموع أرقامه $(3+6+5+4=18)$ يقبل القسمة على 3 . بينما العدد 526 لا يقبل القسمة على 6 (على الرغم من أن احاده 6) لأن مجموع أرقامه $(5+2+6=13)$ لا يقبل القسمة على 3 .

قابلية القسمة على 7 :

لنبحث في قابلية قسمة العدد 4578 على العدد 7 نبدأ أولاً بحذف خانة الآحاد 8 ثم نطرح ضعفها – أي العدد 16 – من العدد المتبقي بعد حذف خانة الآحاد وهو 457 فنحصل على:

$$4578 \rightarrow 457-16=441 .$$

طبعاً هذا الناتج ما زال كبيراً لذلك نكرر تطبيق الطريقة السابقة عليه للحصول على عدد أصغر منه، وهكذا نستمر حتى نحصل على عدد يمكن الحكم على قابليته للقسمة على العدد 7 . فالعملية تسير على النحو التالي:

$$4578 \rightarrow 457-16=441 \rightarrow 44-2=42 .$$

لقد طبقنا العملية مرتين وحصلنا على العدد 42 الذي بلا شك يقبل القسمة على 7 لذلك العدد 4578 يقبل القسمة على العدد 7 .

مثال (14):

اختبر قابلية قسمة العدد 556677 على العدد 7 .

الحل:

$$556677 \rightarrow 55667-14=55653 \rightarrow 5565-6=5559$$
$$\rightarrow 555-18=537 \rightarrow 53-14=39$$

وبما أن العدد 39 لا يقبل القسمة على 7 فإن 556677 لايقبل القسمة على 7 .

قابلية القسمة على 8 :

يقبل العدد الصحيح القسمة على العدد 8 إذا كان العدد المكون من الخانات الثلاث اليمنى يقبل القسمة على 8 . فمثلاً العدد 690112 يقبل القسمة على 8 لأن العدد 112 يقبل القسمة على 8 . بينما العدد 7129012 لا يقبل القسمة على 8 لأن العدد 12 لا يقبل القسمة على 8 .

قابلية القسمة على 9 :

يقبل العدد الصحيح القسمة على العدد 9 فقط إذا كان مجموع خاناته تقبل القسمة على 9 . فمثلاً العدد 34218 يقبل القسمة على 9 لأن مجموع خاناته $(3+4+2+1+8=18)$ يقبل القسمة على 9 . بينما العدد 66504 لا يقبل القسمة على 9 لأن مجموع خاناته $(6+6+5+0+4=21)$ لا يقبل القسمة على 9 .

قابلية القسمة على 10 :

يقبل العدد الصحيح القسمة على العدد 10 إذا كان آحاده صفراً. فمثلاً العدد 934560 يقبل القسمة على 10 لأن آحاده صفراً. بينما العدد 546655 لا يقبل القسمة على 10 لأن آحاده 5 .

قابلية القسمة على11 :

سنشرح قابلية قسمة عدد صحيح على العدد 11 من خلال المثال التالي:

لنفرض أننا نريد بحث قابلية قسمة العدد 3056812 على العدد 11 .

أولاً: نضع بين أرقام العدد 3056812 إشارة الطرح ثم إشارة الجمع من اليسار إلى اليمين كمايلي:

$$3056812 \rightarrow 3-0+5-6+8-1+2=11 \ .$$

ثانياً: نختبر الناتج هل يقبل القسمة على العدد 11 . والناتج هو العدد 11 ويقبل القسمة على 11 إذاً العدد 3056812 يقبل القسمة على 11 . بينما إذا كان الناتج لايقبل القسمة على 11 فإن العدد الأصلي لايقبل القسمة على 11 .

مثال (15):

اختبر قابلية قسمة العدد 19851062 على العدد 11 .

الحل:

$$98510620 \rightarrow 9-8+5-1+0-6+2-0=1 \ .$$

وبما أن الناتج هو العدد 1 لا يقبل القسمة على 11 فإن العدد 19851062 لا يقبل القسمة على 11 .

الأعداد الأولية:

ليكن p عدداً طبيعياً أكبر من واحد، يسمى p عدداً أولياً إذا كان لايقبل القسمة إلا على نفسه والواحد بمعنى اخر.

$$D_p = \{ \pm 1 \ , \ \pm p \ \} \ .$$

وفيما يلي بعض الأعداد الأولية:

$$2 \ , \ 3 \ , \ 5 \ , \ 7 \ , \ 11 \ , \ 13 \ , \ 17, \ 19 \ , \ 23 \ , \ \ldots \ .$$

نظرية:

كل عدد صحيح يمكن تحليله إلى حاصل ضرب أعداد أولية تسمى عوامله الأولية.

مثال (16):

حلل الأعداد التالية إلى عواملها الأولية:

1. 24 . 2. 50 . 3. 42 .

الحل:

1.

24	2
12	2
6	2
3	3
1	

إذاً العوامل الأولية للعدد 24 هي $2^3 \times 3 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 = 24$.

2.

50	2
25	5
5	5
1	

إذاً العوامل الأولية للعدد 50 هي $2 \times 5^2 = 2 \times 5 \times 5 = 50$.

3.

42	2
21	3
7	7
1	

إذاً العوامل الأولية للعدد 42 هي $7 \times 3 \times 2 = 42$.

القاسم المشترك الأكبر:

ليكن $a,b \in \mathbb{Z}$ فإن أكبر قاسم مشترك موجب للعددين a و b يسمى القاسم المشترك الأكبر للعددين a و b ويرمز له بالرمز $g\ c\ d\,(a,b)$.

طريقة ايجاد القاسم المشترك الأكبر:

لايجاد القاسم المشترك الأكبر لعددين صحيحين a و b $\left(g\ c\ d\,(a,b)\right)$ نتبع الخطوات التالية:

1. نحلل كلاً من العددين a و b إلى عواملهما الأولية.
2. نأخذ من كل عاملين مشتركين في a و b عاملاً واحداً.
3. نوجد حاصل ضرب هذه العوامل الاولية المأخوذه من الخطوة (2) ويكون الناتج هو القاسم المشترك الاكبر للعددين a و b .

مثال (17):

أوجد القاسم المشترك الأكبر للعددين:

1. $24\,,60$.
2. $-30\,,\,-42$.

الحل:

1. نحلل العددين 24 و 60 إلى عواملهم الأولية:

$$24 = 2\times 2\times 2\times 3\ .$$

$$60 = 2\times 2\times 3\times 5\ .$$

نأخذ من كل عاملين مشتركين للعددين 42 و 60 عاملاً واحداً، وبالتالي نأخذ العوامل 2 و 2 و 3 فيكون:

$$g\ c\ d\,(24,60)=2\times2\times3=12\ .$$

2. نحلل العددين 30− و 42− إلى عواملهم الاولية:

$$-30=-(2\times3\times5)\ .$$

$$-42=-(2\times3\times7)\ .$$

نأخذ من كل عاملين مشتركين للعددين 30− و 42− عاملاً واحداً، وبالتالي نأخذ العوامل 2 و 3 فيكون :

$$g\ c\ d\,(-30,-42)=2\times3=6\ .$$

ملحوظة: القاسم المشترك الأكبر لعددين دائماً عدداً موجباً لأنه حاصل ضرب أعداد أولية والأعداد الأولية أعداد طبيعية.

المضاعف المشترك الأصغر:

ليكن $a,b\in\mathbb{Z}$ فإن أصغر مضاعف مشترك موجب للعددين a و b يسمى المضاعف المشترك الأصغر للعددين a و b ويرمز له بالرمز $l\ c\ m\,(a,b)$.

طريقة ايجاد المضاعف المشترك الأصغر:

لايجاد المضاعف المشترك الأصغر للعددين a و b $(l\ c\ m\,(a,b))$ نتبع الخطوات التالية:

1. نحلل كل من العددين a و b إلى عواملهما الأولية.

2. نأخذ من كل عاملين مشتركين في a و b عاملاً واحداً ثم نأخذ جميع العوامل المتبقية أيضاً.

3. نوجد حاصل ضرب الأرقام المأخوذه من الخطوة (2) ويكون الناتج هو المضاعف المشترك الأصغر للعددين a و b .

مثال (18):

أوجد المضاعف المشترك الأصغر للعددين:

1. 24 , 30 .   2. −36 , 84 .

الحل:

1. نحلل العددين 24 و 30 إلى عواملهم الأولية:

$$24 = 2\times2\times2\times3 .$$

$$30 = 2\times3\times5 .$$

الآن نأخذ من كل عاملين مشتركين للعددين 24 و 30 عاملاً واحداً أي العوامل 2 و 3 ثم نأخذ العوامل المتبقية وهي 2 و 2 و 5 فيكون:

$$l\ c\ m\,(24,30) = 2\times3\times2\times2\times5 = 120 .$$

2. نحلل العددين 36− و 84 إلى عواملهم الأولية:

$$-36 = -(2\times2\times3\times3) .$$

$$84 = 2\times2\times3\times7 .$$

نأخذ من كل عاملين مشتركين للعددين 36− و 84 عاملاً واحداً أي العوامل 2 و 2 و 3 ومن ثم نأخذ العوامل المتبقية وهي 3 و 7 فيكون:

$$l\ c\ m\,(-36,84) = 2\times2\times3\times3\times7 = 252 .$$

ملحوظة: المضاعف المشترك الأصغر لعددين دائماً عدداً موجباً لأنه حاصل ضرب أعداد أولية التي هي أعداد طبيعية.

(1 – 4) مجموعة الأعداد النسبية:

هي مجموعة الأعداد التي يمكن كتابتها على صورة بسط ومقام من أعداد صحيحة، أي يمكن وضعها على الصورة $\frac{m}{n}$ حيث $m,n \in \mathbb{Z}$ و $n \neq 0$. ونرمز لمجموعة الأعداد النسبية بالرمز $\mathbb{Q}$ ، أي أن:

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{m}{n} \middle| m,n \in \mathbb{Z} \ , \ n \neq 0 \right\} .$$

العمليات الحسابية على الأعداد النسبية:

كما في الأعداد الصحيحة يوجد عمليات جمع وطرح وضرب وقسمة على الأعداد النسبية، والأمثلة التالية توضح ذلك.

مثال (19):

أوجد قيمة كل مما يلي:

1. $\frac{1}{5}+\frac{3}{5}$.
2. $\frac{1}{2}-\frac{1}{3}$.
3. $6\times\frac{1}{2}$.
4. $\frac{2}{4}\div\frac{1}{2}$.

الحل:

1. $\frac{1}{5}+\frac{3}{5}=\frac{1+3}{5}=\frac{4}{5}$.
2. $\frac{1}{2}-\frac{1}{6}=\frac{3}{6}-\frac{1}{6}=\frac{2}{6}$.

4. $\frac{2}{4} \div \frac{1}{2} = \frac{2}{4} \times 2 = \frac{4}{4} = 1$.

3. $6 \times \frac{1}{2} = \frac{6}{2} = 3$.

ننبه الطالب على أنه جرت العادة في الرموز الجبرية بكتابة $a.b$ ليعني $a \times b$ وأحياناً نكتب فقط ab .

خصائص الأعداد النسبية:

إذا كانت $a\ ,\ b\ ,\ c\ ,\ d \in \mathbb{Q}$ بحيث $b \neq 0$ و $d \neq 0$ فإن:

1. $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow ad = cb$. **(صيغة الضرب التبادلي)**

2. $\frac{a.c}{b.c} = \frac{a}{b}\ \ ,\ c \neq 0$ **لأي**

3. $\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} = \frac{a.d \pm c.b}{b.d}$.

4. $\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{a.c}{b.d}$.

5. $\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c} = \frac{a.d}{b.c}\ \ ,\ c \neq 0$ **لأي**

ويمكن الإستفادة من الخواص السابقة لبرهنة كثير من النتائج المتعلقة بالأعداد النسبية وفيما يلي بعض منها:

بفرض أن مقامات الكسور لاتساوي صفر فإن:

1. $\frac{a}{c} \pm \frac{b}{c} = \frac{a \pm b}{c}$.

2. $a \times \frac{b}{a} = b$.

3. $\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c}$.

4. $\frac{a}{\frac{b}{c}} = \frac{ac}{b}$.

5. $\frac{\frac{a}{b}}{c} = \frac{a}{bc}$.

مثال (20):

أي من العبارات النسبية التالية صحيحة وأيها خاطئة:

1. $\frac{2}{3} = \frac{6}{9}$.

2. $\frac{1}{2} = \frac{5}{15}$.

3. $\frac{-5}{2} = \frac{-10}{4}$.

الحل:

للتحقق من صحة العبارات النسبية نستخدم الخاصية الأولى وهي صيغة الضرب التبادلي (طريقة المقص):

1. $\frac{2}{3} \times \frac{6}{9}$

$2 \times 9 = \boxed{18}$ $\quad$ $6 \times 3 = \boxed{18}$.

وبما أن حاصل الضرب التبادلي متساوي فإن العددين النسبيين متساويين، والعبارة النسبية صحيحة.

2. $\frac{1}{2} \times \frac{5}{15}$

$1 \times 15 = \boxed{15}$ $\quad$ $5 \times 2 = \boxed{10}$.

وبمـا أن حاصـل الـضرب التبـادلي غيـر متـساوي فـإن العـددين النـسبيين غيـر متساويين، والعبارة النسبية خاطئة.

3. $\frac{-5}{2} \times \frac{-10}{4}$

$-5 \times 4 = \boxed{-20}$ $\quad$ $-10 \times 2 = \boxed{-20}$.

وبما أن حاصل الضرب التبادلي متساوي فإن العددين النسبيين متساويين، والعبارة النسبية صحيحة.

مثال (21):

ضع المقادير التالية في أبسط صورة:

1. $\frac{12}{4}$.
2. $\frac{-4}{6}$.
3. $\frac{3}{4} + \frac{1}{3}$.
4. $\frac{5}{2} - \frac{3}{4}$.
5. $\frac{2}{3} \times \frac{5}{4}$.
6. $\frac{4}{5} \div \frac{3}{7}$.

الحل:

1. $\frac{12}{4}=\frac{3\times 4}{4}=3$.

2. $\frac{-4}{6}=\frac{-2\times 2}{3\times 2}=\frac{-2}{3}$.

3. $\frac{3}{4}+\frac{1}{3}=\frac{3\times 3+1\times 4}{4\times 3}=\frac{9+4}{12}=\frac{13}{12}$.

4. $\frac{5}{2}-\frac{3}{4}=\frac{5\times 4-3\times 2}{2\times 4}=\frac{20-6}{8}=\frac{14}{8}=\frac{14\div 2}{8\div 2}=\frac{7}{4}$.

5. $\frac{2}{3}\times\frac{5}{4}=\frac{2\times 5}{3\times 4}=\frac{10}{12}=\frac{10\div 2}{12\div 2}=\frac{5}{6}$.

6. $\frac{4}{5}\div\frac{3}{6}=\frac{4}{5}\times\frac{6}{3}=\frac{4\times 6^{2}}{5\times 3_{1}}=\frac{8}{5}$.

مقارنة الأعداد النسبية:

للمقارنة بين عددين نسبيين $\frac{a}{b.}$ و $\frac{c}{d}$ نتبع الخطوات التالية:

1. نجعل إشارة مقام كل كسر موجبة وذلك بضرب البسط والمقام في -1 إذا لزم الأمر.

2. نضرب مقام الثاني في بسط الأول.

3. نضرب مقام الأول في بسط الثاني.

$$ad \longleftarrow \frac{a}{b} \times \frac{c}{d} \longrightarrow c.b$$

4. نقارن بين الناتجين:

- إذا كان $ad > cb$ فإن $\frac{a}{b} > \frac{c}{d}$.
- إذا كان $ad < cb$ فإن $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$.
- إذا كان $ad = cb$ فإن $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$.

مثال (22):

قارن بين العددين النسبيين في كلٍ مما يلي :

1. $\frac{3}{4}$, $\frac{5}{7}$.

2. $\frac{-4}{10}$, $\frac{-2}{6}$.

3. $\frac{-2}{3}$, $\frac{7}{-10}$.

الحل:

1. $$\frac{3}{4} \times \frac{5}{7}$$

$3 \times 7 = \boxed{21}$ $\qquad$ $5 \times 4 = \boxed{20}$.

وبما أن $21 > 20$ فإن $\frac{3}{4} > \frac{5}{7}$.

2. $$\frac{-4}{10} \times \frac{-2}{6}$$

$$-4 \times 6 = \boxed{-24} \qquad -2 \times 10 = \boxed{-20}\ .$$

وبما أن $-24 < -20$ فإن $\frac{-4}{10} < \frac{-2}{6}$.

3. $\frac{-2}{3}$, $\frac{7}{-10}$.

بما أن مقام الكسر $\frac{7}{-10}$ سالب نضرب البسط والمقام في (-1) فينتج لدينا $\frac{-7}{10} = \frac{7}{-10}$. الان نقارن بين الكسرين $\frac{-7}{10}$, $\frac{-2}{3}$ حسب القاعدة فيكون لدينا:

$$\frac{-2}{3} \times \frac{-7}{10}$$

$$-2 \times 10 = \boxed{-20} \qquad -7 \times 3 = \boxed{-21}\ .$$

وبما أن $-20 > -21$ فإن $\frac{-2}{3} > \frac{-7}{10}$.

لاحظ أنه لو طبقنا القاعدة مباشرة بدون تغيير إشارة مقام الكسر الثاني لنتج لدينا:

$$\frac{-2}{3} \times \frac{7}{-10}$$

$$-2 \times -10 = \boxed{20} \qquad 7 \times 3 = \boxed{21}\ .$$

أي $20 < 21$ ومنه الإستنتاج الخاطئ $\frac{-2}{3} < \frac{7}{-10}$.

كثافة الأعداد النسبية:

لنأخذ أي عددين نسبيين a و b بحيث $a < b$ فنلاحظ أن $a+a<a+b<b+b$ أي $2a<a+b<2b$ وبالقسمة على 2 نجد أن:

$$a < \frac{a+b}{2} < b$$

ونكون بذلك قد حصلنا على العدد $c_1 = \frac{a+b}{2}$ الواقع بين العددين a و b وبنفس الطريقة نحصل على عدد اخر $c_2 = \frac{c_1+b}{2}$ واقع بين العددين c_1 و b . أي وجدنا عددين c_1 و c_2 واقعين بين العددين a و b وعلى نفس المنوال يمكن إيجاد أي عدد من الأعداد النسبية بين a و b كما في المثال التالي:

مثال (23):

أوجد أربعة أعداد نسبية بين العددين $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{2}$.

الحل:

$$c_1 = \frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}{2} = \frac{5}{12} .$$

$$c_2 = \frac{c_1+\frac{1}{2}}{2} = \frac{\frac{5}{12}+\frac{1}{2}}{2} = \frac{11}{24} .$$

$$c_3 = \frac{c_2+\frac{1}{2}}{2} = \frac{\frac{11}{24}+\frac{1}{2}}{2} = \frac{23}{48} .$$

$$c_4 = \frac{c_3+\frac{1}{2}}{2} = \frac{\frac{23}{48}+\frac{1}{2}}{2} = \frac{47}{96} .$$

وبذلك نحصل على السلسلة:

$$\frac{1}{3} < \frac{5}{12} < \frac{11}{24} < \frac{23}{48} < \frac{47}{96} < \frac{1}{2} \quad .$$

إن هذه الخاصية التي تمكننا من إيجاد عدد نسبي بين أي عددين نسبيين تسمى خاصية الكثافة وهي غير متحققة للأعداد الصحيحة، فمثلاً العددين 4 و 3 لا يوجد بينهما عدد صحيح.

وهناك طريقة أخرى لتوليد أعداد نسبية بين العددين النسبيين a و b حيث $a<b$ ، فنبدأ بالعدد $c_1 = \frac{a+b}{2}$ ثم $c_2 = \frac{2a+b}{3}$ ثم $c_3 = \frac{3a+b}{4}$ وعموماً $c_n = \frac{na+b}{n+1}$.

مثال (24):

أوجد أربعة أعداد بين العددين $\frac{1}{5}$ و $\frac{1}{4}$.

الحل:

لدينا $\frac{1}{5} < \frac{1}{4}$ وبتطبيق القاعدة أعلاه نحصل على:

$$c_1 = \frac{1\times\frac{1}{5}+\frac{1}{4}}{1+1} = \frac{\frac{1}{5}+\frac{1}{4}}{2} = \frac{\frac{9}{20}}{2} = \frac{9}{40} \ .$$

$$c_2 = \frac{2\times\frac{1}{5}+\frac{1}{4}}{2+1} = \frac{\frac{2}{5}+\frac{1}{4}}{3} = \frac{\frac{13}{20}}{3} = \frac{13}{60} \ .$$

$$c_3 = \frac{3\times\frac{1}{5}+\frac{1}{4}}{3+1} = \frac{\frac{3}{5}+\frac{1}{4}}{4} = \frac{\frac{17}{20}}{4} = \frac{17}{80} \ .$$

$$c_4 = \frac{4\times\frac{1}{5}+\frac{1}{4}}{4+1} = \frac{\frac{4}{5}+\frac{1}{4}}{5} = \frac{\frac{21}{20}}{5} = \frac{21}{100}.$$

وبذلك نحصل على السلسلة:

$$\frac{1}{5} < \frac{21}{100} < \frac{17}{80} < \frac{13}{60} < \frac{9}{40} < \frac{1}{4}.$$

تحويل الأعداد من الصورة الكسرية إلى الصورة العشرية والعكس:

1) الكسر العشري:

كل كسر مقامه قوة للعشرة مثل 10 ، 100 ، 1000 ، ... إلخ يمكن كتابته على صورة أخرى تسمى الصورة العشرية مثلاً $\frac{1}{2}=\frac{5}{10}$ يكتب بالصورة 0.5 بينما الكسر $\frac{5}{100}$ يكتب في الصورة 0.05 أي الصورة العشرية تكون بكتابة البسط وأصفار عن يساره قبل الفاصلة العشرية بحيث عدد الخانات الكلي على يمين الفاصلة يساوي عدد أصفار المقام .

مثال (25):

عبر عن الكسر $\frac{1}{8}$ بالصورة العشرية وكذلك الكسر $\frac{4}{125}$.

الحل:

نحاول جعل المقام قوة للعشرة فنلاحظ أن:

$$\frac{1}{8} = \frac{125}{8\times125} = \frac{125}{1000}.$$

ولذلك $\frac{1}{8}=0.125$.

وبالمثل:

$$\frac{4}{125}=\frac{4\times8}{125\times8}=\frac{32}{1000}\ .$$

ولذلك $\frac{4}{125}=0.032$.

أيضاً ننبه الطالب على أن معظم الكسور لايمكن كتبتها بصورة كسر عشري منتهي فمثلاً الكسر $\frac{1}{3}$ لا يمكن جعل مقامه من مضاعفات العشرة ولكن بالقسمة الاعتيادية نلاحظ أن القسمة لا تنتهي وينتج لدينا $\frac{1}{3}=0.333...$.

2) العمليات الحسابية على الكسور العشرية:

عملية الجمع والطرح:

لجمع الكسرين العشريين 6.382 و 4.7551 فإننا نرتب الأعداد تحت بعضها بحيث تكون الفواصل تحت بعضها ونضع أصفاراً في الخانات الخالية عند الحاجة ونجمع كما نجمع الأعداد الصحيحة ثم نضع الفاصلة في مكانها تحت الفواصل العشرية:

$$\begin{array}{r} 6.3480 \\ 4.7551 \; + \\ \hline 11.1031 \end{array}$$

عملية الضرب:

لضرب الكسرين العشريين 2.3 و 1.25 فإننا نضرب العددين متجاهلين الفاصلة العشرية (.) في كل من العددين ثم نضع الفاصلة العشرية في الناتج بعد ثلاث خانات بدأ من اليمين (وهو مجموع الخانات بعد الفاصلة العشرية في العددين).

$$\begin{array}{r} 123 \\ \times \quad 25 \\ \hline 615 \\ + \quad 246 \\ \hline 3075 \end{array}$$

إذا $1.25 \times 2.5 = 3.075$.

عملية القسمة:

لقسمة الكسر العشري 2.74 على 0.2 نوحد عدد الخانات على يمين الفاصلة العشرية في العددين وذلك بإضافة أصفار فيصبح العددين كالتالي 2.74 ، 0.20 ثم نزيل الفاصلة العشرية في العددين فيصبحان عددين صحيحين 20 و 274 ثم نجري القسمة المطولة.

$$\begin{array}{r|l} & 7.13 \\ \hline 20 & 274 \\ & 20 \\ \hline & 74 \\ & 60 \\ \hline & 140 \\ & 140 \\ \hline & 000 \end{array}$$

إذا $2.74 \div 0.2 = 13.7$.

3) تحويل العدد الكسري إلى عدد عشري:

إذا أردنا تحويل العدد الكسري $\frac{a}{b}$ إلى الصورة العشرية فإننا نقسم البسط (وهو العدد a) على المقام (وهو العدد b) وسينتج لدينا إحدى الحالتين التاليتين:

1. تنتهي عملية القسمة بعد إجراء عدد معين من العمليات.

2. تستمر عملية القسمة من غير نهاية مع تكرار الأعداد ويسمى (عدداً دورياً غير منتهي).

وسنوضح ذلك من خلال الأمثلة التالية:

مثال (26):

حول الأعداد الكسرية التالية إلى الصورة العشرية:

1. $\frac{1}{4}$.   2. $\frac{5}{6}$.

الحل:

1.
```
      0.25
  4 | 10 -
       8
     ----
      20 -
      20
     ----
      00
```

إذا $\frac{1}{4}=0.25$.

2.
```
      0.833. ...
  6 | 50 -
      48
     ----
      20 -
      18
     ----
      20 -
      18
     ----
       2
```

إذا $\frac{5}{6}=0.8333...=0.8\overline{3}$ . .

حيث يعني الخط فوق العدد 3 تكراره إلى مالانهاية ونقول في هذه الحالة أن $0.8\overline{3}$ كسر عشري دوري غير منتهي جزءه الدوري 3 وجزءه الثابت 8 بالمقابل فإن $\frac{13}{22}=0.5909090...=0.5\overline{90}$ أي أن الكسر $\frac{13}{22}$ يساوي العدد العشري $0.5\overline{90}$ الدوري غير المنتهي وجزءه الدوري 90 وجزئه الثابت 5.

4) تحويل العدد العشري إلى عدد كسري:

إذا كان الكسر العشري منتهي أو دوري غير منتهي فإننا نستطيع تحويله إلى عدد كسري .

أولاً : تحويل العدد العشري المنتهي إلى عدد كسري:

إذا أردنا تحويل العدد العشري المنتهي 0.65 إلى عدد كسري نضع العدد بدون الفاصلة العشرية في البسط وهو 65 ، و نضع في المقام الرقم 1 وعلى يمينه عدداً من الأصفار مساو لعدد الخانات بعد الفاصلة وبالتالي يكون المقام 100 ، فيصبح العدد العشري هو $\frac{65}{100}$. والأمثلة التالية توضح ذلك .

مثال (27):

حول الأعداد العشرية التالية إلى أعداد كسرية:

1. 0.235 . 2. 0.0013 . 3. 4.05 .

الحل:

العدد الكسري	مقام العدد الكسري	عدد الخانات بعد الفاصلة العشرية	العدد دون فاصلة عشرية	العدد العشري	
$\frac{235}{1000}$	1000	3	235	0.235	1
$\frac{13}{10000}$	10000	4	13	0.0013	2
$\frac{405}{100}$	100	2	405	4.05	3

ثانياً: تحويل الكسر العشري الدوري غير المنتهي إلى عدد كسري:

أ) إذا كان جميع أرقام العدد العشري الدوري غير المنتهي تدور مثلاً $0.\overline{31}$ فإن بسط العدد الكسري هو الأرقام التي تدور وهو العدد 31 ، ومقامه يحتوي على الرقم 9 مكرراً بعدد الأرقام التي تدور أي 99 . فيكون العدد الكسرى الذي يمثل الكسر العشري $0.\overline{31}$ هو $\frac{31}{99}$.

مثال (28):

حول كلاً من الكسور العشرية التالية إلى أعداد كسرية:

1. $0.\overline{3}$. 2. $0.\overline{502}$. 3. $0.\overline{14}$.

الحل:

	العدد العشري	الرقم الذي يدور	عدد الأرقام التي تدور	مقام العدد الكسري	العدد الكسري
1	$0.\overline{3}$	3	1	9	$\frac{3}{9}$
2	$0.\overline{502}$	502	3	999	$\frac{502}{999}$
3	$0.\overline{14}$	14	2	99	$\frac{14}{99}$

ب) في حالة احتواء الكسر الدوري على جزء ثابت غير دوار نتبع الخطوات الواردة في المثال التالي.

مثال (29):

حول العدد العشري $0.4\overline{2}$ إلى عدد كسري:

الحل: نفرض أن:

$$x = 0.4222... \qquad ------ (1)$$

نـضرب المتـساوية (1) بالعـدد 10 لأن هنـاك عـدد واحـد ثابـت لايـدور فـي العـدد العشري وهو 4 (إذا كـان هنـاك عـددين ثـابتين نـضرب المعادلـة بالعـدد 100) و بالتالي تصبح المتساوية (1) على الصورة:

$$10x = 4.222... \qquad ------ (2)$$

الآن نـضرب المتـساوية (2) بالعـدد 10 لأن هنـاك عـدد واحـد يـدور فـي العـدد العشري وهو 2 (إذا كان هناك عددين يدورين نـضرب المعادلـة بالعدد 100) و بالتالي تصبح المتساوية (2) على الصورة:

$$100x = 42.22... \qquad ------ (3)$$

نطرح المتساوية (2) من المتساوية (3) فينتج :

$$\begin{array}{r} 100x = 42.22... \\ - \quad 10x = 4.222... \\ \hline 90x = 38 \end{array}$$

وبالقسمة على 90 نحصل على: $x = \frac{38}{90}$.

النسبة المئوية:

نسمع كثيراً بالنسبة المئوية في الحياة العملية، فمثلاً عند الدخول إلى محل تجاري أو مجمع نرى سلعة عليها تخفيض بنسبة مئوية معينة، أوعند متابعة نشرة الأحوال الجوية على التلفزيـون تظهـر أمامنـا النـسبة المئويـة للرطوبـة، أو عنـد شـراء بعـض أنـواع المنتجات الغذائية نشاهد كميات المواد الغذائية على علبة المنتج بالنسبة المئوية وهكذا.

النسبة المئوية:

هي كل عدد كسري مقامه 100 وبسطه عدد كسري عشري فإذا كان لدينا الكسر $\frac{a}{100}$ حيث a كسر عشري فيكتب كنسبة منوية على الصورة $a\%$.

فمثلاً: 23% و 6.5% هي نسب مئوية، بينما $\frac{2}{3}$ و $\frac{4}{9}$ هي كسور اعتيادية ، أما 0.9 و 0.34 فهي كسور عشرية .

تحويل النسبة المئوية إلى كسر اعتيادي:

لتحويل النسبة المئوية $a\%$ إلى كسر اعتيادي نقسم العدد a على 100 ، ثم نقوم بعملية التبسيط إلى أبسط صورة .

مثال (30):

حول النسب المئوية التالية إلى كسر اعتيادي في أبسط صورة .

1. 25% .　　2. 44% .　　3. 7.5% .

الحل:

1. $25\% = \frac{25}{100} = \frac{1}{4}$.
2. $44\% = \frac{44}{100} = \frac{11}{25}$.
3. $7.5\% = \frac{7.5}{100} = \frac{75}{1000} = \frac{3}{40}$.

تحويل النسبة المئوية إلى كسر عشري:

لتحويل النسبة المئوية $a\%$ إلى كسر عشري نحرك الفاصلة العشرية في العدد a خانتين باتجاه اليسار مع حذف الرمز % .

مثال (31):

حول النسب المئوية التالية إلى كسر عشري:

1. 25% .
2. 44% .
3. 7.5% .

الحل:

1. $25\% = 0.25$.
2. $44\% = 0.44$.
3. $7.5\% = 0.075$.

تحويل الكسر الاعتيادي والعشري إلى نسب مئوية:

لتحويل الكسر الاعتيادي أو العشري إلى نسبة مئوية نضرب الكسر في العدد 100 ونضع رمز النسبة المئوية % بجوار الناتج بعد كتابته ككسر عشري.

مثال (32):

حول الكسور التالية إلى نسب مئوية:

1. $\frac{1}{2}$.
2. $\frac{16}{25}$.
3. 0.37 .
4. 0.08 .

الحل:

1. $\frac{1}{2}\times 100\% = \frac{100}{2}\% = 50\%$.

2. $\frac{16}{25}\times 100\% = 64\%$.

3. $0.37\times 100\% = 37\%$.

4. $0.08\times 100\% = 8\%$.

تطبيقات على النسبة المئوية:

مثال(33):

تقدم 150 طالباً لأداء امتحان في أحد مقررات الرياضيات وكانت نسبة النجاح 76%. أوجد عدد الطلبة الناجحين في هذا المقرر.

الحل:

عدد الطلاب الناجحين هو:

$$76\%\times 150 = 0.76\times 150 = 114$$ طالب .

ماذا لو كان المطلوب عدد الراسبين في هذا المقرر، فكر في الإجابة؟

مثال (34):

إذا كان عدد الطلاب الكلي في إحدى المحاضرات هو 80 وكان نسبة الغياب هي 15% فكم عدد الطلاب الحاضرين في المحاضرة.

الحل:

نسبة الغياب هي 15% ، إذاً نسبة الحضور هي $85\% = 15\% - 100\%$. وبالتالي عدد الطلاب الحاضرين هو:

$$85\% \times 80 = 0.85 \times 80 = 68$$ طالب .

مثال(35):

تقدم 120 طالباً لأداء امتحان في أحد مقررات الرياضات وكان عدد الطلاب الناجحين 90 طالباً. أوجد النسبة المئوية للرسوب.

الحل:

في البداية نوجد عدد الطلاب الراسبين:

$$120 - 90 = 30$$ طالباً .

النسبة المئوية للرسوب هي:

$$\frac{30}{120} \times 100\% = \frac{300}{12}\% = 25\% \; .$$

مثال(36):

إشترى أحمد جهاز كمبيوتر مقابل 2300 ريالا وأضيف قيمة ضمان بنسبة 8% ، ما قيمة الضمان للجهاز.

الحل:

قيمة الضمان = سعر السلعة × النسبة المئوية لقيمة الضمان .

إذاً قيمة الضمان هي :

$$2300 \times 8\% = 2300 \times \frac{8}{100} = 184$$ ريالا .

ما هومقدار المبلغ الكلي الذي دفعه أحمد ثمناً للجهاز؟

مثال (37):

إذا دخلت محل تجاري لشراء سلعة مخفضة ما وكان سعرها الأصلي 50 ريال ثم خفض بنسبة 16% ، فأحسب ما يلي:

1. مقدار التخفيض بالريال.
2. سعر السلعة بعد التخفيض.

الحل:

1. مقدار التخفيض = سعر السلعة × نسبة التخفيض .

$$50\times 16\% = 50\times \frac{16}{100} = 8$$ ريال .

2. سعر السلعة بعد التخفيض = سعر السلعة قبل التخفيض − مقدار التخفيض.

$$50-8=42$$ ريال .

(1 – 5) مجموعة الأعداد الغير نسبية:

ويرمز لها رمزها بالرمز I ، وهي الأعداد التي لايمكن كتابتها على صورة بسط ومقام من الاعداد الصحيحة. و هذه أمثلة على الأعداد الغير نسبية:

$$\sqrt{2}\ ,\ \sqrt{3}\ ,\ \sqrt{5}\ ,\ \sqrt{2}+1\ ,\ 0.12571093...\ ,\ \pi\ ,\ e\ .$$

ننبه الطالب على أنه بالرغم من أنه يمكن كتابة $\sqrt{2}$ على صورة الكسر $\frac{\sqrt{2}}{1}$ إلا أنه ليس عدد نسبي حيث البسط $\sqrt{2}$ ليس عدداً صحيحاً. كما نذكر حقيقة تدعوا للدهشة أن الأعداد الغير نسبية أكثر بكثير من الأعداد النسبية مع أننا لانعرف إلا عدداً قليلاً منها.

(1 – 6) مجموعة الأعداد الحقيقية:

ويرمز لها بالرمز $\mathbb{R}$ وهي أهم مجموعة أعداد في الرياضيات، وتشمل مجموعة الأعداد النسبية ومجموعة الأعداد الغير نسبية أي أن $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup I$ ، ولدينا العلاقة التالية بين مجموعات الأعداد: $\mathbb{N} \subset W \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.

كما سنرمز للأعداد الحقيقية غير الصفرية بالرمز $\mathbb{R}^*$. وتعتبر عمليات الجمع $(+)$ والطرح $(-)$ والضرب $(\times)$ والقسمة $(\div)$ عمليات أساسية على الأعداد الحقيقية. وفيما يلي بعض الخصائص الهامة لمجموعة الأعداد الحقيقية مع التنبيه على أنه لأي عددين $a , b \in \mathbb{R}$ سنكتب ab ليعني الضرب $a \times b$.

خصائص الأعداد الحقيقية:

إذا كان $a , b , c \in \mathbb{R}$ فإن:

1. خاصية الإبدال:

في عملية الجمع: $a+b=b+a$.

في عملية الضرب: $ab=ba$.

2. خاصية التجميع:

في عملية الجمع: $a+(b+c)=(a+b)+c$.

في عملية الضرب: $a(bc)=(ab)c$.

3. خاصية التوزيع:

$$a(b+c)=(ab)+(ac) .$$

4. العنصر المحايد:

العنصر المحايد لعملية الجمع هو 0 أي أن: $a+0=0+a=a$.

العنصر المحايد لعملية الضرب هو 1 أي أن: $a1 = 1a = a$.

5. المعكوس:

لأي عدد $a \in \mathbb{R}$ فإن المعكوس الجمعي هو $(-a)$ ولدينا:

$$a + (-a) = (-a) + a = 0 \ .$$

ولأي عدد $a \in \mathbb{R}^*$ فإن المعكوس الضربي هو $\left(\frac{1}{a}\right)$ ولدينا:

$$a\frac{1}{a} = \frac{1}{a}a = 1 \ .$$

أما معكوس الصفر الضربي فلا يوجد .

والجدول التالي يوضح هذه الخاصية لبعض الأعداد الحقيقية:

العدد	المعكوس الجمعي	المعكوس الضربي
4	-4	$\frac{1}{4}$
-2	2	$\frac{-1}{2}$
$\frac{1}{6}$	$\frac{-1}{6}$	6
$\frac{\pi}{3}$	$\frac{-\pi}{3}$	$\frac{3}{\pi}$
$\sqrt{2}$	$-\sqrt{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$
0	0	غير معرف

ويمكن إثبات خواص أخرى كثيرة للأعداد الحقيقية نذكر منها الخواص التالية:

إذا كان $a,b \in \mathbb{R}$ فإن:

1. $a0 = 0a = 0$.
2. $(-1)a = -a$.
3. $-(-a) = a$.
4. $-(a+b) = -a-b$.
5. $(-a)b = a(-b) = -ab$.
6. $(-a)(-b) = ab$.

وكذلك من ضمن الخصائص المهمة لعمليتي الجمع والضرب ما يلي:

خصائص الحذف:

لأي $a\ ,\ b\ ,\ c \in \mathbb{R}$ لدينا:

1. إذا كان $a+c = b+c$ فإن $a = b$.
2. إذا كان $c \neq 0$ وكان $ac = bc$ فإن $a = b$.
3. إذا كان $ab = 0$ فإما $a = 0$ أو $b = 0$.

ويمكن تعريف العمليتين الحسابيتين الطرح والقسمة بدلالة عمليتي الجمع والضرب .

تعريف عمليتي الطرح والقسمة:

لأي عددين $a \, , \, b \in \mathbb{R}$ نعرف ما يلي:

1. عملية الطرح $(-)$:

$a-b=a+(-b)$ ، **حيث $-b$ هو المعكوس الجمعي للعدد** b .

2. عملية القسمة $(\div)$: بفرض $b \neq 0$:

$a \div b = a.\frac{1}{b}$ ، **حيث $\frac{1}{b}$ هو المعكوس الضربي للعدد** b .

مثال (37):

أحسب ما يلي:

1. $(-5)+2$.
2. $4\times(-3)$.
3. $5\times(2\times3)$.
4. $3\times(4+6)$.
5. $15-6-5$.
6. $15-(6-5)$.
7. $\frac{4}{5}-\frac{\sqrt{2}}{3}$.

الحل:

1. $(-5)+2=2+(-5)=2-5=-3$.
2. $4\times(-3)=-(4\times3)=-12$.
3. $5\times(2\times3)=5\times6=30$.

4. $3\times(4+6)=3\times10=30$.

$3\times(4+6)=(3\times4)+(3\times6)=12+18=30$ أو .

5. $15-6-5=9-5=4$.

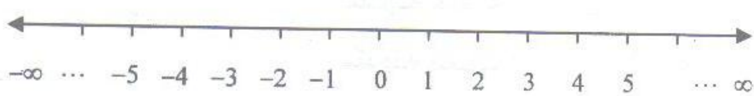
6. $15-(6-5)=15-6+5=14$.

$15-(6-5)=15-1=14$ أو .

7. $\frac{4}{5}-\frac{\sqrt{2}}{3}=\frac{(4\times3)-(5\times\sqrt{2})}{5\times3}=\frac{12-5\sqrt{2}}{15}$.

خط الأعداد الحقيقية:

يمكن تمثيل الأعداد الحقيقية هندسيا على أي خط مستقيم بإختيار أي نقطة لتمثل الصفر ونقطة على اليمين لتمثل 1 ومن ثم ينتج لدينا أن أي نقطة على الخط تُمثل عدداً حقيقياً وكل عدد حقيقي يحدد نقطة على الخط ونحصل على ما نسميه بخط الأعداد الحقيقية، كما في الشكل التالي:



حيث نعني بالرمز ∞ تزايد الأعداد من اليمين بدون توقف بينما $-\infty$ يعني تناقصها بدون توقف. ويمكن الإستفادة من خط الأعداد الحقيقية في المقارنة بين عددين حقيقيين لمعرفة العدد الأكبر من العدد الأصغر. فالعدد الحقيقي a يكون أكبر من العدد الحقيقي b إذا كان العدد a يقع إلى يمين العدد b على خط الأعداد الحقيقية ، وفي هذه الحالة فإن $(a-b)$ أكبر من الصفر، أي أن حاصل الطرح عدد موجب ، وعندما يقع العدد c على يسار العدد a فإن c أصغر من a ويكون في هذه الحالة $(c-a)$ عدداً سالباً.

نستعمل رموز خاصة للدلالة على أن عدد حقيقي أكبر من أو أصغر من عدد اخر والجدول التالي يبين هذه الرموز ومدلولاتها:

العبارة الرياضية	المعنى
$a > b$	a أكبر من b
$a \geq b$	a أكبر من أو يساوي b
$a < b$	a أصغر من b
$a \leq b$	a أصغر من أو يساوي b

أي عبارة رياضية تحتوي على أي من هذه الرموز $\leq$, $>$, $\geq$, $<$ تسمى متباينة أو متراجحة.

مثال(38): حدد أي من المتباينات التالية صحيحة وأيها خاطئة:

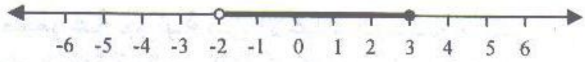
1. $5 > 9$ متباينة خاطئة .
2. $4 < -8$ متباينة خاطئة .
3. $0 \geq -3$ متباينة صحيحة .
4. $-1 \leq -10$ متباينة خاطئة .
5. $2 \leq 2$ متباينة صحيحة .
6. $7 > 7$ متباينة خاطئة .

الفترات الحقيقية:

لنعتبر المجموعة A مجموعة جزئية من الاعداد الحقيقية حيث:

$$A = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 < x \leq 3\}.$$

والتي تمثل على خط الأعداد الحقيقية بالخط الغامق كما في الشكل:



أي أن A هي جميع الأعداد الحقيقية الواقعة بين العددين -2 و 3 متضمنة العدد 3 ولا تحوي العدد -2 . نسمي A فترة نصف مغلقة من اليمين ونصف مفتوحة من اليسار ونرمز لها بالرمز $(-2,3]$. مع ملاحظة أن الدائرة الصغيرة السوداء على خط الأعداد ترمز للطرف المغلق والبيضاء للطرف المفتوح. وعموماً لأي عددين حقيقيين $a<b$ فإن $(a,b]=\{x \mid a<x \le b\}$ بالمثل: $(a,b)=\{x \mid a<x <b\}$ تسمى فترة مفتوحة.

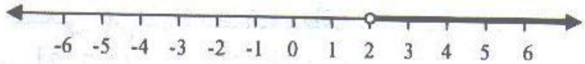
وكذلك $[a,b]=\{x \mid a\le x \le b\}$ تسمى فترة مغلقة. أما $[a,b)=\{x \mid a\le x <b\}$ تسمى فترة نصف مفتوحة من اليمين ونصف مغلقة من اليسار.

وتسمى المتباينة $a<x \le b$ بالفترة ونرمز لها بالرمز $(a,b]$. إن الطرف الأيسر من الفترة ممثل بالقوس) وهذا يعني أن العدد a ليس ضمن الفترة، ونقول أن الفترة مفتوحة من اليسار. وقوس الطرف الأيمن من الفترة هو] وهذا يعني أن العدد b ضمن الفترة، ونقول أن الفترة مغلقة من اليمين. والجدول التالي يبين أشكال الفترات ونوعها وتمثيلها على خط الأعداد الحقيقية:

الفترة	المتباينة	تمثيلها على خط الأعداد	نوعها
(a,b)	$a<x<b$		فترة مفتوحة
$[a,b]$	$a\le x\le b$		فترة مغلقة
$(a,b]$	$a<x\le b$		فترة مفتوحة من اليسار و مغلقة من اليمين
$[a,b)$	$a\le x<b$		فترة مغلقة من اليسار و مفتوحة من اليمين

نصف الفترة:

لنعتبر المجموعة A مجموعة جزئية من الاعداد الحقيقية والتي هي أكبر من 2 والممثلة على خط الأعداد الحقيقية بالخط الغامق كما في الشكل التالي:



أي أن $A = \{x \in \mathbb{R} | x > 2\}$.

ونسمي A فترة نصف مفتوحة من اليسار ونرمز لها بالرمز $(2,\infty)$. وبشكل عام لأي عدد حقيقي a نعرف نصف الفترة المفتوحة من اليسار (a,∞) بالمثل نعرف نصف الفترة المغلقة من اليسار $[a,\infty)$ ونصف الفترة المفتوحة من اليمين $(-\infty,a)$ ونصف الفترة المغلقة من اليمين $(-\infty,a]$ والجدول التالي يبين أشكال هذه الفترات.

نوعها	تمثيلها على خط الأعداد	المتباينة	الفترة
فترة مفتوحة		$x > a$	(a,∞)
فترة مغلقة		$x \geq a$	$[a,\infty)$
فترة مفتوحة		$x < b$	$(-\infty,b)$
فترة مغلقة		$x \leq b$	$(-\infty,b]$

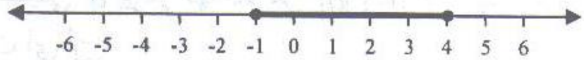
مثال(39):

مثل ما يلي من الفترات على خط الأعداد الحقيقية:

1. $[-1,4]$.
2. $[0,3)$.
3. $(-5,-2)$.
4. $(-3,\infty)$.
5. $(-\infty,2]$.

الحل:

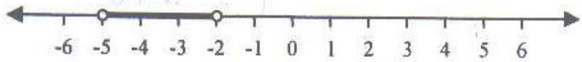
1. $[-1,4]$



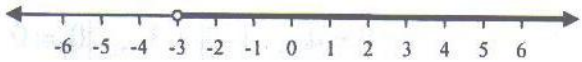
2. $[0,3)$



3. $(-5,-2)$



4. $(-3,\infty)$



5. $(-\infty,2]$



مثال (40):

أكتب المتباينات التالية على صورة فترات:

1. $-5 \le x \le 6$.
2. $0 \le x < 3$.
3. $-8 < x \le -1$.
4. $x \ge 5$.
5. $x < 2$.

الحل:

1. $-5 \le x \le 6$ $\quad [-5,6]$.
2. $0 \le x < 3$ $\quad [0,3)$.
3. $-8 < x \le -1$ $\quad (-8,-1]$.
4. $x \ge 5$ $\quad [5,\infty)$.
5. $x < 2$ $\quad (-\infty,-2)$.

(1 – 7) القيمة المطلقة:

القيمة المطلقة لأي عدد حقيقي a يرمز لها بالرمز $|a|$ وتعرف أنها العدد محذوفاً منه الإشارة السالبة إن وجدت أي أن:

$$|a| = \begin{cases} a & a \geq 0 \\ -a & a < 0 \end{cases}$$

مثال (41):

$$|4| = 4 \ , \ |-3| = 3 \ , \ |0| = 0 \ , \ |6-8| = |-2| = 2$$

لاحظ أن القيمة المطلقة للعدد a دائما مقدار غير سالب .

خصائص القيمة المطلقة:

إذا كان $a \ , \ b \in \mathbb{R}$ **فإن:**

1. $|a| \geq 0$.
2. $|a| = 0 \ \Leftrightarrow \ a = 0$.
3. $|a.b| = |a|.|b|$.
4. $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|} \quad , \ b \neq 0$.
5. $|a-b| = |b-a|$.
6. $|a+b| \leq |a| + |b|$.
7. $|a-b| \geq |a| - |b|$.

مثال (42):

احسب قيمة كلٍ مما يلي:

1. $-|6|$.
2. $-|-3|$.
3. $\left|\frac{1}{2}-\frac{2}{3}\right|$.
4. $\frac{|4-10|}{-2}$.
5. $\frac{5+|6-9|}{|7-3|}$.
6. $\left|\frac{-3}{2}\right|$.

الحل:

1. $-|6|=-6$.
2. $-|-3|=-3$.
3. $\left|\frac{1}{2}-\frac{2}{3}\right|=\left|\frac{(1\times3)-(2\times2)}{2\times3}\right|=\left|\frac{3-4}{6}\right|=\left|\frac{-1}{6}\right|=\frac{1}{6}$.
4. $\frac{|4-10|}{-2}=\frac{|-6|}{-2}=\frac{6}{-2}=-3$.
5. $\frac{5+|6-9|}{|7-3|}=\frac{5+|-3|}{|4|}=\frac{5+3}{4}=\frac{8}{4}=2$.
6. $\left|\frac{-3}{2}\right|=\frac{|-3|}{|2|}=\frac{3}{2}$.

المسافة بين نقطتين على خط الأعداد الحقيقية:

لتكن A و B نقطتين على خط الأعداد الحقيقية و تمثلان العددين a و b على الترتيب فإن المسافة $d(A,B)$ بين النقطتين A و B تعرف بأنها:

$$d(A,B)=|b-a|=|a-b| .$$

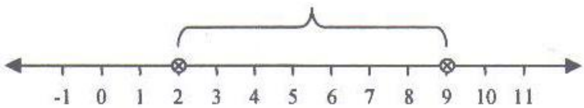
مثال (43):

أوجد المسافة بين النقطتين A و B اللتين تمثلان العددين a و b في كل مما يلي:

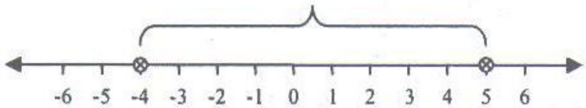
1. $a=2 \quad , \quad b=9$.
2. $a=5 \quad , \quad b=-4$.

الحل:

1. $d(A,B)=|b-a|=|9-2|=|7|=7$.



2. $d(A,B)=|b-a|=|-4-5|=|-9|=9$.



تمارين

1. حلل الأعداد التالية إلى عواملها الأولية:

a) 8 . b) 60 . c) 78 .

d) 660 . e) 140 . f) 165 .

g) 1575 . h) 1270 . i) 1716 .

2. أوجد ثلاث أعداد بين العددين التاليين:

a) $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{3}$. b) $\frac{2}{7}$, $\frac{3}{7}$.

c) $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$. d) $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{7}$.

e) $\frac{2}{5}$, $\frac{1}{2}$. f) $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$.

3. أوجد مضاعفات العدد a $\left(M_a\right)$ وقواسم العدد a $\left(D_a\right)$ في كل مما يلي:

a) $a=0$.   b) $a=1$.   c) $a=8$.

d) $a=9$.   e) $a=12$.   f) $a=10$.

4. ابحث قابلية الأعداد التالية للقسمة على الأعداد في كل مما يلي:

11 ، 10 ، 9 ، 8 ، 7 ، 6 ، 5 ، 4 ، 3 ، 2

a) 665280 .   b) 85965 .

c) 5640750 .   d) 2719386 .

5. أوجد القاسم المشترك الأكبر والمضاعف المشترك الأصغر لكل عددين مما يلي:

a) 36 , 12 .   b) 18 , 60 .

c) 24 , 54 .   d) 20 , 30 .

e) 60 , 36 .   f) 90 , 150 .

g) 30 , 110 .   h) 495 , 132 .

6. في كل مما يلي حول النسب المئوية التالية إلى كسر اعتيادي في أبسط صورة وأيضاً إلى كسر عشري:

a) 20% .		b) 5% .		c) 8% .

d) 60% .		e) 80% .		f) 75% .

g) 95% .		h) 36% .		i) 12.5% .

7. في كل مما يلي حول الكسور التالية إلى نسب مئوية:

a) $\frac{3}{5}$.		b) $\frac{4}{25}$.		c) $\frac{7}{10}$.

d) $\frac{11}{20}$.		e) $\frac{7}{8}$.		f) 0.19 .

g) 0.03 .		h) 0.225 .		i) 0.082 .

8. تقدَّم 450 طالب للقبول في جامعة في تخصص الإقتصاد وتم قبول 36% من المتقدمين فكم عدد الطلاب الذين تم قبولهم ؟ .

9. إذا كان عدد حضور طلاب في إحدى المحاضرات هو 24 من أصل 32 طالب أوجد النسبة المئوية للطلاب الحاضرين.

10. معرض سيارات أعلن عن تخفيض أسعاره بنسبة 5.5% وكان سعر إحدى السيارات قبل التخفيض 40000 ريالاً . ما هو سعر السيارة بعد التخفيض.

11. اشترى تاجر أجهزة تلفزيون بمبلغ 580 ريالاً للجهاز الواحد وباعها بنسبة ربح 25% ، أوجد سعر البيع للجهاز الواحد.

12. إذا كانت نسبة النجاح في أحد المقررات 85% وكان عدد الطلاب المسجلين في المقرر 2540 طالبا، فكم عدد الطلاب الراسبين في هذه المقرر.

13. أوجد المعكوس الجمعي والمعكوس الضربي لكل من الاعداد التالية:

a) $\frac{5}{4}$.　　b) $\sqrt{6}$.　　c) $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

14. مثل كل فترة مما يلي على خط الأعداد الحقيقية:

a) $(-6,0]$.　　b) $[-2,1)$.

c) $(1,\infty)$.　　d) $-3 \le x \le 4$.

e) $5 < x < 9$.　　f) $2 \le x < 11$.

g) $x > 3$.

h) $x \le -5$.

15. أكتب الفترات التالية على صورة متباينات:

a) $[-3,-1)$.

b) $[0,5]$.

c) $(-2,4)$.

d) $(-\infty,1]$.

e) $(-4,\infty)$.

16. قارن بين الأعداد النسبية التالية:

a) $\frac{4}{3}$, $\frac{5}{2}$.

b) $\frac{2}{6}$, $\frac{5}{15}$.

c) $\frac{-4}{7}$, $\frac{-3}{5}$.

d) $\frac{6}{8}$, $\frac{4}{7}$.

17. حول الأعداد العشرية التالية إلى الصورة الكسرية:

a) 0.05 .

b) 3.2 .

c) $0.\overline{4}$.

d) $0.\overline{25}$.

e) $2.\overline{1}$.

f) $0.5\overline{3}$.

g) $0.12\overline{5}$.

h) $0.3\overline{14}$.

18. حول الأعداد الكسرية التالية إلى الصورة العشرية:

a) $\frac{3}{5}$.

b) $\frac{5}{8}$.

c) $\frac{2}{3}$.

d) $\frac{8}{15}$.

e) $\frac{5}{11}$.

19. إحسب ناتج كل من العبارات التالية:

a) $\frac{4}{6}+\frac{5}{6}$.

b) $5+\frac{2}{4}$.

c) $\frac{6}{5}+\frac{8}{10}$.

d) $\frac{4}{3}-\frac{10}{6}$.

e) $-5\times\frac{2}{5}$.

f) $\frac{5}{3}\times\frac{3}{4}$.

g) $\frac{-9}{2}\times\frac{4}{12}$.

h) $6\div\frac{3}{4}$.

i) $\frac{-\frac{3}{5}}{9}$.

j) $\frac{-12}{9}\div\frac{-2}{3}$.

k) $\frac{\sqrt{3}}{4}\times\frac{1}{2}$.

l) $\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{3}$.

m) $123.43+3.536$.

n) $(6.25+1.516)-4.62$.

o) 4.59×0.75 .

p) $9.43\div 4.1$.

q) $6.545\div 1.19$.

r) $2.5(54.1-12.12)$.

20. إحسب ناتج كل مما يلي:

a) $\frac{|2-6|}{10-|3-8|}$.

b) $\frac{|-5|-|5-8|}{|-3-7|+5}$.

c) $\dfrac{|3-5|}{6}+\dfrac{5-|4-1|}{4}$.   d) $\dfrac{|-2\times 5|}{|4\times 7|}$

21. على خط الاعداد الحقيقية أوجد المسافة بين النقطتين A و B اللتين تمثلان العددين b , a في كل مما يلي:

a) $a=4$, $b=-2$.   b) $a=-3$, $b=9$.

c) $a=-5$, $b=-3$.   d) $a=10$, $b=6$.

(1 – 8) القوى و الأسس:

إذا كان a عدداً حقيقياً وكان n عدداً صحيحاً موجباً فإن:

$$a^n = \underbrace{a.a.a \ldots a}_{n}$$

ونقول أن a^n هو القوة النونية للعدد a أو (a أس n) ونسمى a الأساس و n الأس. مثلاً a^2 تمثل $a.a$ ، و a^3 تمثل $a.a.a$. وفيما يلي بعض الأمثلة التوضيحية:

$$2^4 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 16$$

$$(-3)^3 = -3 \times -3 \times -3 = -27$$

$$\left(\frac{2}{5}\right)^2 = \frac{2}{5} \times \frac{2}{5} = \frac{4}{25}$$

ومن المهم أن نلاحظ أن -2^2 تعني $-(2 \times 2) = -4$ بينما $(-2)^2$ تعني $-2 \times -2 = 4$.

<u>قوانين الأسس:</u>

إذا كان كل من $a , b \in \mathbb{R}$ وكان $m , n \in \mathbb{N}$ فإن:

1. $a^m a^n = a^{m+n}$.
2. $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n} , \quad a \neq 0$.
3. $(a^m)^n = a^{m.n}$.
4. $(ab)^n = a^n b^n$.
5. $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n} , \quad b \neq 0$.

مثال (44):

احسب كل مما يلي:

1. -5^2 . 2. $(-4)^3$. 3. $\left(\frac{2}{3}\right)^4$.

4. $(2a)^3$. 5. $\left(\frac{a^2}{b}\right)^3$, $b \neq 0$. 6. $a^4 \div (3a)^2$, $a \neq 0$.

الحل:

1. $-5^2 = -(5 \times 5) = -25$.

2. $(-4)^3 = -4 \times -4 \times -4 = -64$.

3. $\left(\frac{2}{3}\right)^4 = \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{16}{81}$.

4. $(2a)^3 = 2^3 \times a^3 = 8a^3$.

5. $\left(\frac{a^2}{b}\right)^3 = \frac{\left(a^2\right)^3}{b^3} = \frac{a^{2\times3}}{b^3} = \frac{a^6}{b^3}$.

6. $a^4 \div (3a)^2 = \frac{a^4}{(3a)^2} = \frac{a^4}{3^2 \times a^2} = \frac{a^4}{9a^2} = \frac{a^{4-2}}{9} = \frac{a^2}{9}$.

لاحظ أنه لأي a فإن $a = a^1$.

تعاريف:

1. **لأي عدد حقيقي** $a \neq 0$ **نعرف** a^0 **بأنه العدد 1 أي** $a^0 = 1$.
2. **لأي عدد حقيقي** $a \neq 0$ **ولأي عدد طبيعي** n **نعرف** a^{-n} **بأنه:**

$$a^{-n} = \left(a^{-1}\right)^n = \left(\frac{1}{a}\right)^n = \frac{1}{a^n}$$

لاحـــظ مـــن التعريـــف أعـــلاه أن $\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{1}{a/b}\right)^n = \left(\frac{b}{a}\right)^n = \frac{b^n}{a^n}$ حيـث $a \neq 0$, $b \neq 0$.

مثال (45):

أوجد ناتج مايلي:

1. $-(-6)^0$.
2. 4^{-2} .
3. $\left(\frac{1}{2}\right)^{-3}$.
4. $\left(\frac{5}{3}\right)^{-2}$.

الحل:

1. $-(-6)^0 = -(1) = -1$.
2. $4^{-2} = \frac{1}{4^2} = \frac{1}{16}$.

3. $\left(\frac{1}{2}\right)^{-3} = 2^3 = 8$.

4. $\left(\frac{5}{3}\right)^{-2} = \left(\frac{3}{5}\right)^{2} = \frac{3^2}{5^2} = \frac{9}{25}$.

(1 – 9) الجذور:

العبارة $9 = 3^2$ تعني أن 9 هو القوة الثانية للعدد 3 بالمقابل نقول أن 3 هو الجذر التربيعي للعدد 9 ونكتب $\sqrt{9} = 3$ أيضاً $9 = (-3)^2$ يعني أن -3 هو الجذر التربيعي السالب للعدد 9 ونكتب $-\sqrt{9} = -3$. وعموماً لأي عددين حقيقيين a و b بحيث $a^2 = b$ فإننا نقول أن a هو جذر للعدد b وفي هذه الحالة أيضاً $-a$ هو جذر للعدد b ونكتب $a = \sqrt{b}$ إذا كان a موجب أو $a = -\sqrt{b}$ إذا كان a سالب. ويمكن في الواقع تعميم ذلك للأسس الزوجية $4,6,8,...$ فمثلاً $16 = 2^4$ يعني أن كلاً من $2,2-$ هما جذران من الرتبة الرابعة للعدد 16 ، ونكتب $\sqrt[4]{16} = 2$ ، $-\sqrt[4]{16} = -2$. وعموماً لأي عدد زوجي n وعدد حقيقي a فإن a^n هو عدد حقيقي موجب b وفي هذه الحالة نقول أن a هو جذر نوني للعدد b ونكتب $a = \sqrt[n]{b}$ إذا كان a موجباً أو $a = -\sqrt[n]{b}$ إذا كان a سالباً. أي كل عدد حقيقي موجب له جذران نونيان أما الأعداد السالبة فليس لها جذور نونية عندما تكون n زوجية. بالمقابل لو أخذنا الأسس الفردية $3,5,7,...$ ، فنلاحظ مثلاً أن $64 = 4^3$ بينما $(-4)^3 \neq 64$ أي أن 64 له جذر تكعيبي واحد فقط هو $\sqrt[3]{64} = 4$ بينما $\sqrt[3]{-64} = -4$ وعموماً لأي عدد فردي n ولأي عدد حقيقي a بحيث $a^n = b$ فإننا نقول أن a هو الجذر النوني الوحيد للعدد b. لاحظ في هذه الحالة أن أي عدد حقيقي b سالب أو موجب له جذر نوني $\sqrt[n]{b}$ في حالة n عدد فردي.

إصطلاح: إذا وجد الجذر النوني $\sqrt[n]{b}$ وليكن a فإننا نكتب $a = \sqrt[n]{b} = b^{\frac{1}{n}}$ وكما ذكرنا أعلاه بالنسبة للجذر النوني $b^{\frac{1}{n}}$ هناك حالتان:

الحالة الأولى: عندما تكون n عدد زوجي و $b > 0$ فإن $\sqrt[n]{b} = a$ حيث a هو العدد الموجب الذي يحقق $b^n = a$ ، فمثلاً العدد 5 هو الجذر التربيعي للعدد 25 ($25^{\frac{1}{2}} = \sqrt{25} = 5$) لأن ($5^2 = 25$) . أما إذا كان n عدد زوجي و $b < 0$ فإن $\sqrt[n]{b}$ غير موجود.

الحالة الثانية: عندما تكون n عدد فردي فإن $\sqrt[n]{b} = a$ هو العدد a الذي يحقق $b^n = a$ ، سواءاً كان العدد b سالباً أو موجباً. فمثلاً العدد 3 هو الجذر التكعيبي للعدد 27 ($27^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{27} = 3$) ، و العدد 2- هو الجذر التكعيبي للعدد 8- ($(-8)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{-8} = -2$) .

<u>قوانين الجذور:</u>

إذا كان $a , b \in \mathbb{R}$ أعداد حقيقية وكان n عدداً صحيحاً موجباً، بحيث أن $\sqrt[n]{a}$ و $\sqrt[n]{b}$ معرفان حسب القاعدة أعلاه فإن:

1. $\sqrt[n]{a.b} = \sqrt[n]{a}.\sqrt[n]{b}$.
2. $\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} \ , \ b \neq 0$.

<u>ملحوظات:</u>

1. إذا كان $n = 2$ فنكتب $\sqrt{a}$ بدلاً من $\sqrt[2]{a}$.
2. لأي عدد حقيقي a فإن: $\sqrt{a^2} = |a|$ (لماذا؟).
3. $-a^{\frac{1}{n}}$ تعني $-\sqrt[n]{a}$ ، بينما $(-a)^{\frac{1}{n}}$ تعني $\sqrt[n]{-a}$.

مثال (46):

أوجد قيمة الجذور التالية:

1. $-16^{\frac{1}{2}}$.
2. $(-27)^{\frac{1}{3}}$.
3. $\sqrt[5]{-32}$.
4. $\sqrt{\frac{25}{9}}$.
5. $8^{-\frac{1}{3}}$.
6. $\sqrt{2}\sqrt{8}$.

الحل:

1. $-16^{\frac{1}{2}} = -\sqrt{16} = -4$.
2. $(-27)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{-27} = -3$.
3. $\sqrt[5]{-32} = -2$.
4. $\sqrt{\frac{25}{9}} = \frac{\sqrt{25}}{\sqrt{9}} = \frac{5}{3}$.
5. $8^{-\frac{1}{3}} = \left(\frac{1}{8}\right)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{\frac{1}{8}} = \frac{\sqrt[3]{1}}{\sqrt[3]{8}} = \frac{1}{2}$.
6. $\sqrt{2}\sqrt{8} = \sqrt{16} = 4$.

تعريف $a^{\frac{m}{n}}$:

إذا كان a عدداً حقيقياً وكان n و m عددان طبيعيان بحيث أن $a^{\frac{1}{n}}$ معرف، فنعرف العدد $a^{\frac{m}{n}}$ بأنه:

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} .$$

لاحظ في هذه الحالة أن:

$$a^{\frac{m}{n}} = \left(a^m\right)^{\frac{1}{n}} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^m .$$

مثال (47):

أوجد قيمة الجذور التالية:

1. $\sqrt[4]{(-7)^4}$.　　2. $\sqrt[3]{(-6)^3}$.　　3. $\sqrt[3]{x^6}$.

4. $4^{\frac{3}{2}}$.　　5. $\sqrt[3]{8x^{-3}y^9}$.

الحل:

1. $\sqrt[4]{(-7)^4} = \sqrt[4]{7^4} = 7$.

2. $\sqrt[3]{(-6)^3} = -6$.

3. $\sqrt[3]{x^6} = x^{\frac{6}{3}} = x^2$.

4. $4^{\frac{3}{2}} = \left(\sqrt{4}\right)^3 = (2)^3 = 8$.

5. $\sqrt[3]{8x^{-3}y^9} = \sqrt[3]{8}\sqrt[3]{x^{-3}}\sqrt[3]{y^9} = 2x^{\frac{-3}{3}}y^{\frac{9}{3}} = 2x^{-1}y^3 = \frac{2y^3}{x}$.

<u>الأسس الحقيقية:</u>

يتضح للطالب مما ذكر أعلاه أنه لأي عدد حقيقي $a > 0$ ولأي عدد نسبي $\frac{m}{n}$ فإن $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$ وفي الواقع يمكن إبدال الأس $\frac{m}{n}$ بأي عدد حقيقي b لنحصل على التعريف التالي:

تعريف:

ليكن a و b عددين حقيقيين بحيث $a > 0$ عندئذ يوجد عدد حقيقي موجب c يحقق المتساوية $c = a^b$. نسمي c القوة a^b للأساس a .

تدريب: استعمل الالة الحاسبة لإيجاد $3^{\sqrt{2}}$ وكذلك π^e .

إن جميع قوانين الأسس التي درسناها سابقاً تنطبق على الحالات التي تكون فيها الأسس أعداد حقيقية بشرط أن يكون الأساس $a > 0$. وعلى وجه الخصوص $a^{-b} = \frac{1}{a^b}$.

(1 – 10) اللوغاريتمات:

ليكن لدينا المتساوية $a^b = c$ حيث $a > 0$ و $a \neq 1$ (بالطبع في هذه الحالة $c > 0$) . عندئذ نقول أن b هو لوغاريتم العدد c بالنسبة للأساس a ، ونكتب ذلك رمزياً بالصيغة: $\log_a c = b$.

مثلاً $\log_2 8 = 3$ لأن $2^3 = 8$. ويمكن تلخيص ذلك بالتعريف التالي:

تعريف اللوغاريتمات:

لتكن a , b , c أعداد حقيقية بحيث أن a عدد موجب لايساوي الواحد وليكن $a^b = c$ عندئذ نقول أن b هو لوغاريتم c للأساس a ونكتب ذلك على الصورة $\log_a c = b$.

أي أن $c = a^b$ (الصورة الأسية) تكافئ $\log_a c = b$ (الصورة اللوغاريتمية).

ملحوظات:

1. يمكن أن تكون قيمة اللوغاريتم (b) عدداً سالب أو موجباً أو صفراً ، لكن الأساس a و العدد c داخل اللوغاريتم يكونان دائما عددين موجبين. أي أنه إذا كان $\log_a c = b$ فإن $c > 0$ و $a > 0$.

2. اللوغاريتم للأساس واحد غير معرف أي لا يمكن كتابة $\log_1 c = b$ ، لأنه لجميع قيم b $1^b = 1$.

3. جرت العادة على كتابة $\log c = b$ ليعني $\log_{10} c = b$ ويسمى اللوغاريتم المعتاد (اللوغاريتم العشري) .

قوانين اللوغاريتمات:

لأي أعداد حقيقية موجبة a , b , c بحيث a عدد موجب لايساوي الواحد ولأي عدد حقيقي r فإن:

1. $\log_a 1 = 0$.
2. $\log_a a = 1$.
3. $\log_a (b.c) = \log_a b + \log_a c$.
4. $\log_a \left(\dfrac{b}{c}\right) = \log_a b - \log_a c \ \ , \ c \neq 0$.
5. $\log_a b^r = r \log_a b$.
6. $\log_a b = \log_a c \Leftrightarrow b = c$.

مثال (48):

حول العبارات الأسية التالية إلى الصورة اللوغاريتمية:

1. $2^5 = 32$. 2. $3^4 = 81$. 3. $4^{-2} = \frac{1}{16}$.

الحل:

1. $2^5 = 32 \Leftrightarrow \log_2 32 = 5$.
2. $3^4 = 81 \Leftrightarrow \log_3 81 = 4$.
3. $4^{-2} = \frac{1}{16} \Leftrightarrow \log_4\left(\frac{1}{16}\right) = -2$.

مثال (49):

حول العبارات اللوغاريتمية التالية إلى الصورة الأسية:

1. $\log_2 8 = 3$. 2. $\log_3\left(\frac{1}{27}\right) = -3$. 3. $\log 10000 = 4$.

الحل:

1. $\log_2 8 = 3 \Leftrightarrow 2^3 = 8$.
2. $\log_3\left(\frac{1}{27}\right) = -3 \Leftrightarrow 3^{-3} = \frac{1}{27}$.
3. $\log 10000 = 4 \Leftrightarrow 10^4 = 10000$.

مثال (50):

أوجد قيمة المقادير التالية بدون الالة الحاسبة:

1. $\log_7 49$. 2. $\log_2\left(\frac{1}{16}\right)$.

الحل:

1. $\log_7 49 = \log_7 7^2 = 2\log_7 7 = 2$.

2. $\log_2\left(\frac{1}{16}\right) = \log_2\left(\frac{1}{2^4}\right) = \log_2 2^{-4} = -4\log_2 2 = -4$.

مثال (51):

أوجد قيمة المقادير التالية بدون الالة الحاسبة:

1. $\log 100$. 2. $\log 0.001$. 3. $\log 1000 + \log 0.1$.

الحل:

1. $\log 100 = \log 10^2 = 2\log 10 = 2$.

2. $\log 0.001 = \log 10^{-3} = -3\log 10 = -3$.

3. $\log 1000 + \log 0.1 = \log 10^3 + \log 10^{-1}$

$$= 3\log 10 + -\log 10 = 3 + -1 = 2 .$$

مثال (52):

أوجد قيمة x فيما يلي بدون الالة الحاسبة:

1. $\log_3 x = 2$. 2. $\log_5 x = -2$.

3. $\log_2 16 = x$. 4. $\log_x 1000 = 3$.

5. $\log_{16} x = \frac{3}{2}$.   6. $\log_x (5x - 12) = 1$.

الحل:

1. $\log_3 x = 2 \Rightarrow x = 3^2 \Rightarrow x = 9$.

2. $\log_5 x = -2 \Rightarrow x = 5^{-2} = \frac{1}{5^2} \Rightarrow x = \frac{1}{25}$.

3. $\log_2 16 = x \Rightarrow 2^x = 16 = 2^4 \Rightarrow x = 4$.

4. $\log_x 1000 = 3 \Rightarrow x^3 = 1000 = 10^3 \Rightarrow x = 10$.

5. $\log_{16} x = \frac{3}{2} \Rightarrow x = 16^{\frac{3}{2}} = \left(\sqrt{16}\right)^3 = 4^3 \Rightarrow x = 64$.

6. $\log_x (5x - 12) = 1 \Rightarrow 5x - 12 = x^1 \Rightarrow 5x - x = 12$

$\Rightarrow 4x = 12 \Rightarrow x = 3$.

مثال (53):

أوجد قيمة x بدون الآلة الحاسبة:

1. $\log_2 (x + 5) = 2\log_2 5$.   2. $\log(3x + 2) = \log(10 - x)$.

الحل:

1. $\log_2 (x + 5) = 2\log_2 5 \Rightarrow \log_2 (x + 5) = \log_2 5^2$

$\Rightarrow x + 5 = 25 \Rightarrow x = 20$.

$$2.\ \log(3x+2)=\log(10-x) \Rightarrow 3x+2=10-x$$

$$\Rightarrow 3x+x=10-2 \Rightarrow 4x=8 \Rightarrow x=2$$

مثال (54):

إذا كان $\log_a 2=0.69$ و $\log_a 3=1.1$ أوجد قيمة كل مما يلي:

1. $\log_a 6$.
2. $\log_a 12$.
3. $\log_a\left(\frac{9}{4}\right)$.

الحل:

$$1.\ \log_a 6=\log_a(3\times 2)=\log_a 3+\log_a 2$$
$$=1.1+0.69=1.79\ .$$

$$2.\ \log_a 12=\log_a(4\times 3)=\log_a 4+\log_a 3$$
$$=\log_a 2^2+\log_a 3=2\log_a 2+\log_a 3$$
$$=2(0.69)+1.1=1.38+1.1=2.48\ .$$

$$3.\ \log_a\left(\frac{9}{4}\right)=\log_a\left(\frac{3^2}{2^2}\right)=\log_a\left(\frac{3}{2}\right)^2=2\log_a\left(\frac{3}{2}\right)$$
$$=2(\log_a 3-\log_a 2)$$
$$=2(1.1-0.69)=2(0.41)=0.84\ .$$

مثال (55):

أوجد قيمة ما يلي باستخدام الالة الحاسبة:

1. $\log 7$. 2. $\log_6 11$. 3. $\log_5 15$.

الحل:

1. لحساب قيمة $\log 7$ باستخدام الالة الحاسبة نتبع الخطوات التالي:

$$\boxed{\log} \to \boxed{7} \to \boxed{=} \xrightarrow{\text{الناتج}} \boxed{0.845098}$$

2. لحساب قيمة $\log_6 11$ نقدم هذه القاعدة أولا:

$$\log_c b = \frac{\log_a b}{\log_a c} \ .$$

وإذا اعتبرنا أن $a = 10$ لسهولة التعامل مع اللوغاريتم العشري وخصوصاً عند استخدام الالة الحاسبة فإن:

$$\log_c b = \frac{\log b}{\log c} \ .$$

ولحساب قيمة $\log_6 11 = \dfrac{\log 11}{\log 6}$ باستخدام الالة الحاسبة نتبع الخطوات التالي:

$$\boxed{(} \to \boxed{\log} \to \boxed{11} \to \boxed{)} \to \boxed{\div} \to \boxed{(} \to \boxed{\log} \to \boxed{6} \to \boxed{)} \to \boxed{=} \xrightarrow{\text{الناتج}} \boxed{1.338291}$$

3. ولحساب قيمة $\log_5 15 = \dfrac{\log 15}{\log 5}$ باستخدام الالة الحاسبة نتبع الخطوات التالي:

$$\boxed{(} \to \boxed{\log} \to \boxed{15} \to \boxed{)} \to \boxed{\div} \to \boxed{(} \to \boxed{\log} \to \boxed{5} \to \boxed{)} \to \boxed{=} \xrightarrow{\text{الناتج}} \boxed{1.6826062}$$

تمارين

1. حول كل مما يلي إلى الصيغة اللوغاريتمية:

a) $5^3 = 125$.

b) $6^0 = 1$.

c) $(27)^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{9}$.

d) $10^{-4} = 0.0001$.

2. حول كل مما يلي إلى الصيغة الأسية:

a) $\log_4 1 = 0$.

b) $\log 1000 = 3$.

c) $\log_8 16 = \frac{4}{3}$.

d) $\log_2\left(\frac{1}{8}\right) = -3$.

3. أكتب المقادير التالية في أبسط صورة:

a) 3^{-3} .

b) $-9^{\frac{1}{2}}$.

c) $\left(\frac{2}{3}\right)^{-2}$.

d) $\left(\frac{-2^3}{4}\right)^2$.

e) $\sqrt[3]{-8}$.

f) $\sqrt[6]{(-2)^6}$.

g) $8^{\frac{2}{3}}$.

h) $\sqrt{400}$.

i) $\left(\frac{3}{4}\right)^2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{-3}$.

j) $\left(\frac{1}{27}\right)^{-\frac{1}{3}}$.

k) $\left(\frac{16}{9}\right)^{\frac{1}{2}}$.

l) $\left(\frac{9}{4}\right)^{-\frac{3}{2}}$.

m) $\sqrt{9^3}$.

n) $\sqrt[3]{8^5}$.

o) $\sqrt{2}\sqrt{8}$.

p) $\sqrt[3]{2}\sqrt[3]{4}$.

4. أوجد قيمة كل مما يلي بدون الالة الحاسبة:

a) $\log_5 5^3$.

b) $\log_3 \sqrt{3}$.

c) $\log_4\left(\frac{1}{4}\right)$.

d) $\log\sqrt{100}$.

e) $\log_2 16$.

f) $\log_4 64$.

g) $\log_{\frac{1}{2}} 4$.

h) $\log_5 (25)^3$.

i) $\log 0.001 - \log 100$.

j) $\log_3 \left(\frac{1}{9}\right)$.

k) $\log_3 (\log_2 8)$.

l) $\log_2 \left(\log_4 \sqrt{4}\right)$.

5. أوجد قيمة x في كل مما يلي:

a) $\log_4 x = 2$.

b) $\log_{\frac{1}{3}} x = 2$.

c) $\log_8 x = \frac{2}{3}$.

d) $\log_3 (x + 4) = 2$.

e) $\log_x 5 = \frac{1}{2}$.

f) $\log_x 27 = 3$.

g) $\log_x \left(\frac{1}{16}\right) = -2$.

h) $\log_x 8 = -3$.

i) $\log_x 0.0001 = -4$.

j) $\log_3 2x = \log_3 6$.

k) $\log_x (3x - 10) = 1$.

l) $\log_4 (2x - 3) = 2\log_4 3$.

6. إذا كـان $\log 2 = 0.301$ و $\log 3 = 0.477$ و $\log 5 = 0.699$ أوجـد قيمة كل مما يلي بدون الالة الحاسبة:

a) $\log 15$.
b) $\log 9$.
c) $\log 8$.
d) $\log 20$.
e) $\log\left(\frac{10}{3}\right)$.
f) $\log 12$.
g) $\log\left(\frac{9}{4}\right)$.
h) $\log 0.5$.
i) $\log 36$.
j) $\log 450$.

7. أوجد قيمة كل ما يلي باستخدام الالة الحاسبة:

a) $\log 21$.
b) $\log 55$.
c) $\log 7$.
d) $\log 0.25$.
e) $\log_2 5$.
f) $\log_5 12$.

g) $\log_8\left(\frac{1}{2}\right)$.

h) $\log_{0.2} 0.5$.

i) $\log_{\frac{3}{4}} 20$.

j) $\log_{\frac{2}{5}}\left(\frac{7}{6}\right)$.

الفصل الثاني
العبارات الجبرية

العبارات الجبرية

(2 – 1) العبارة الجبرية:

إن العمليات الجبرية هي العمليات الأربعة الجمع والطرح والضرب والقسمة. والمتغير هو عبارة عن رمز جبري يعبر عن أعداد حقيقية وعادة ما يرمز للمتغير بالأحرف $x, y, z, w, ...$. والعبارة الجبرية هي عبارة عن صيغة من متغيرات وأعداد حقيقية مرتبطة فيما بينها بواسطة العمليات الجبرية والجذور. ومن الأمثلة على العبارات الجبرية كالتالي:

$$x^3+4x^2 \quad , \quad \frac{2xy+\sqrt{2x}}{y-3} \quad , \quad \frac{xy+z^{-2}}{y^2+\sqrt{x}} \ .$$

وتسمى العبارة الجبرية التي تكتب على الصورة $a\,x^n$ حيث $a\in\mathbb{R}^*$ و $n\in W$ ، بحد جبري في المتغير x والمعامل الثابت a . وأحادي الحد الذي فيه المتغيرين x, y يكتب أما العبارة الجبرية على الصورة $b\,x^n y^m$ حيث $b\in\mathbb{R}^*$ و $n, m\in W$ فتسمى بحد جبري في المتغيرين x, y والمعامل الثابت b .. ودرجة الحد الجبري هي مجموع أسس متغيراته فمثلا $7x^2y^4$ هو حد جبري من الدرجة 6 . أما الحد الخالي من المتغيرات فإنه يسمى الحد المطلق ودرجتة هي الصفر فمثلا 5 هو حد جبري من الدرجة صفر . ونورد في الجدول التالي مزيداً من الأمثلة :

الحد الجبري	5	x	$-3x^2y^3$	$7xy^2z$
معامله	5	1	-3	7
درجته	0	1	5	4

وعند جمع أو طرح حدين جبريين أو أكثر ينتج عبارة جبرية تسمى عبارة مركبة ومن الأمثلة على العبارات المركبة كالتالي:

$$x^3 - 2x^2 + 5 \quad , \quad 4x^2y^3 - 5xy^2 \quad , \quad -2xy + 2z + 3x^3 \; .$$

ودرجة العبارة الجبرية المركبة هي أعلى درجة حد من حدودها الجبرية المكونة لها كما يتضح في الجدول التالي:

العبارة الجبرية	$x^3 - 2x^2 + 5$	$4x^2y^3 - 5xy^2$	$-2xy + 2z + 3x^2$
درجتها	3	5	2

والعبارة الجبرية المركبة التي تحوي متغيراً واحداً فقط تسمى كثيرة حدود فمثلاً: $2x^3 - 3x + 5$ هي كثيرة حدود في المتغير x من الدرجة الثالثة.

(2 – 2) العمليات على العبارات الجبرية:

حيث أن المتغيرات في العبارات الجبرية تأخذ الحدود يأخذ قيماً حقيقية فإن جميع خواص الأعداد الحقيقية من جمع وطرح وضرب وقسمة يمكن تطبيقها على العبارات الجبرية.

جمع وطرح العبارات الجبرية:

جمع و طرح العبارات الجبرية يتم عن طريق جمع و طرح الحدود المتشابهة، وهي التي لها نفس المتغيرات ونفس الدرجة ولا تختلف إلا في المعاملات فقط. وجمع و طرح الحدود المتشابهة هو حد مشابه لهذه الحدود ومعامله يساوي مجموع أو طرح هذه الحدود فعلى سبيل المثال $\left(5x^2 + 2x^2 = 7x^2\right)$ و $\left(3xy^2 - 5xy^2 = -2xy^2\right)$.

مثال (1):

أوجد حاصل جمع العبارات الجبرية التالية:

1. $6x^3-5x+2$, $2x^3+8x^2-3x$.

2. $x-3y+5z$, $y-x+z$.

3. $4x^2-3x+1$, $2x-2x^2$, $3x^2-5x-3$.

الحل:

1. $(6x^3-5x+2)+(2x^3+8x^2-3x)$

$=6x^3+2x^3+8x^2-5x-3x+2$

$=8x^3+8x^2-8x+2$.

2. $(x-3y+5z)+(y-x+z)$

$=x-x-3y+y+5z+z$

$=0-2y+6z=-2y+6z$.

3. $(4x^2-3x+1)+(2x-2x^2)+(3x^2-5x-3)$

$=4x^2-2x^2+3x^2-3x+2x-5x+1-3$

$=5x^2-6x-2$.

مثال (2):

أوجد حاصل طرح $5x^3+3x^2-6x+4$ من $8x^3-x^2-2x-1$.

الحل:

$(8x^3-x^2-2x-1)-(5x^3+3x^2-6x+4)$

$=8x^3-x^2-2x-1-5x^3-3x^2+6x-4$

$$= 8x^3 - 5x^3 - x^2 - 3x^2 - 2x + 6x - 1 - 4$$

$$= 3x^3 - 4x^2 + 4x - 5$$

ضرب حد جبري في اخر:

عند ضرب حد جبري في حد جبري اخر نضرب المعاملات معاً والمتغيرات معاً مع مراعاة جمع أسس الرموز المتشابهة حسب القاعدة $x^n x^m = x^{n+m}$.

مثال (3):

أوجد ناتج عمليات الضرب التالية:

1. $(5)(4x^2)$.
2. $(3x^2)(6x^5)$.
3. $(-4x)(3x^4)$.
4. $(-2xy^2)(4x^3)$.
5. $(-4x^2y)(-3xy^3)$.

الحل:

1. $(5)(4x^2) = (5\times 4)(x^2) = 20x^2$.

2. $(3x^2)(6x^5) = (3\times 6)(x^2 \times x^5) = 18x^{2+5} = 18x^7$.

3. $(-4x)(3x^4) = (-4\times 3)(x \times x^4) = -12x^{1+4} = -12x^5$.

4. $(-2xy^2)(4x^3) = (-2\times 4)(x \times x^3)(y^2)$

$$= -8x^{1+3}y^2 = -8x^4y^2 .$$

5. $(-4x^2y)(-3xy^3) = (-4\times -3)(x^2 \times x)(y \times y^3)$

$$= 12x^{2+1}y^{1+3} = 12x^3y^4 .$$

ضرب حد جبري في عبارة جبرية:

عند ضرب حد جبري في عبارة جبرية فإننا نضرب هذا الحد في كل حد من حدود العبارة الجبرية.

مثال (4):

أوجد ناتج عمليات الضرب التالية:

1. $4(2x-5y+3)$.
2. $2x(3x+6)$.
3. $-6x^2(x^4-3x+5)$.
4. $3x^2y^3(2x^2-3xy-4y^2)$.

الحل:

1. $4(2x-5y+3)=4(2x)+4(-5y)+4(3)=8x-20y+12$.
2. $2x(3x+6)=2x(3x)+2x(6)=6x^2+12x$.
3. $-6x^2(x^4-3x+5)=-6x^2(x^4)-6x^2(-3x)-6x^2(5)$

$$=-6x^6+18x^3-30x^2 .$$

4. $3x^2y^3(2x^2-3xy-4y^2)$

$$=3x^2y^3(2x^2)+3x^2y^3(-3xy)+3x^2y^3(-4y^2)$$

$$=6x^4y^3-9x^3y^4-12x^2y^5 .$$

ضرب عبارة جبرية في أخرى:

عند ضرب عبارة جبرية في أخرى فإننا نضرب كل حد من العبارة الجبرية الأولى في العبارة الجبرية الثانية .

مثال (5):

أوجد ناتج عمليات الضرب التالية:

1. $(3x-2)(2x+4)$.
2. $(5x^2+x)(3x-1)$.
3. $(2x-2y)(3x+y)$.

الحل:

1. $(3x-2)(2x+4)=3x(2x+4)-2(2x+4)$

$$=6x^2+12x-4x-8=6x^2+8x-8 .$$

2. $(5x^2+x)(3x-1)=5x^2(3x-1)+x(3x-1)$

$$=15x^3-5x^2+3x^2-x=15x^3-2x^2-x$$

3. $(2x-2y)(3x+y)=2x(3x+y)-2y(3x+y)$

$$=6x^2+2xy-6xy-2y^2=6x^2-4xy-2y^2 .$$

وهناك بعض الحالات الشهيرة في عمليات الضرب والتي تتكرر كثيراً ومنها:

$(x-y)(x+y)=x^2-y^2$	الفرق بين مربعين .
$(x+y)^2=x^2+2xy+y^2$	المربع الكامل .
$(x-y)^2=x^2-2xy+y^2$	المربع الكامل .

مثال (6):

أوجد ناتج ما يلي باستخدام الحالات الخاصة السابقة:

1. $(2x-9y)(2x+9y)$.
2. $(2x+3)^2$.
3. $(x-5y)^2$.

الحل:

1. $(2x-9y)(2x+9y)=(2x)^2-(9y)^2=4x^2-81y^2$.
2. $(2x+3)^2=(2x)^2+2(2x)(3)+(3)^2=4x^2+12x+9$.
3. $(x-5y)^2=(x)^2-2(x)(5y)+(5y)^2=x^2-10xy+25y^2$.

<u>قسمة حد جبري على اخر:</u>

عند قسمة حد جبري على اخر نقسم المعاملات ونقسم المتغيرات المتشابهة مع مراعاة طرح الأسس حسب القاعدة $\frac{x^n}{x^m}=x^{n-m}$.

مثال (7):

أوجد ناتج عمليات القسمة التالية:

1. $\frac{6x^2}{2}$.
2. $\frac{12x^3}{3x}$.
3. $\frac{-6x^5}{8x^2}$.
4. $\frac{-15x^3y^6}{-3xy^2}$.

الحل:

1. $\frac{6x^2}{2} = \frac{6}{2}x^2 = 3x^2$.
2. $\frac{12x^3}{3x} = \frac{12}{3}\frac{x^3}{x} = 4x^{3-1} = 4x^2$.
3. $\frac{-6x^5}{8x^2} = \frac{-6}{8}\frac{x^5}{x^2} = \frac{-3}{4}x^{5-2} = \frac{-3}{4}x^3$.
4. $\frac{-15x^3y^6}{-3xy^2} = \frac{-15}{-3}\frac{x^3}{x}\frac{y^6}{y^2} = 5x^{3-1}y^{6-2} = 5x^2y^4$.

<u>قسمة عبارة جبرية على حد جبري:</u>

عند قسمة عبارة جبرية على حد جبري نقسم كل حد من حدود العبارة الجبرية على هذا الحد. ونستخدم الخاصية $\left(\frac{A+B}{C} = \frac{A}{C} + \frac{B}{C}\right)$.

مثال (8):

أوجد ناتج عمليات القسمة التالية:

1. $\dfrac{6x - 10y + 2}{2}$.

2. $\dfrac{3x^4 + 12x^3}{6x^2}$.

3. $\dfrac{4x^4y^3 - 10xy^5 + 8x^3y^3}{2xy^2}$.

الحل:

1. $\dfrac{6x - 10y + 2}{2} = \dfrac{6x}{2} - \dfrac{10y}{2} + \dfrac{2}{2} = 3x - 5y + 1$.

2. $\dfrac{3x^4 + 12x^3}{6x^2} = \dfrac{3x^4}{6x^2} + \dfrac{12x^3}{6x^2} = \dfrac{1}{2}x^2 + 2x$.

3. $\dfrac{4x^4y^3 - 10xy^5 + 8x^3y^3}{2xy^2} = \dfrac{4x^4y^3}{2xy^2} - \dfrac{10xy^5}{2xy^2} + \dfrac{8x^3y^3}{2xy^2}$

$= 2x^3y - 5y^3 + 4x^2y$.

(2 – 2) تحليل العبارات الجبرية:

تحليل العبارة الجبرية هو تحويلها كحاصل ضرب عبارات جبرية أخرى. وسنقتصر على تحليل العبارات الجبرية التي هي كثيرات الحدود. فعلى سبيل المثال ممكن كتابة كثيـر الحـدود $x^2 - 1$ كحاصـل الـضرب $(x+1)(x-1)$ أي أن $(x-1)$ و $(x+1)$ عوامل لكثيرة الحدود $x^2 - 1$. عند تحليل كثيرة حدود معاملاتها أعداد صحيحة نريد أن تكون معاملات عوامله أعداد صحيحة أيضاً. على سبيل المثال $x^2 - 2$ كثيرة حدود معاملاته أعداد صحيحة، ولكن لايمكن كتابته على هيئة ضرب كثيرتي حدود بمعاملات صحيحة على الرغم من أنه يمكن كتابتها على الصورة $(x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2})$ لكن $\sqrt{2}$ ليست عدد صحيح.

التحليل بأخذ العامل المشترك الأكبر:

وطريقة تحليل كثير حدود بأخذ العامل المشترك الأكبر تتم بإخراج العامل المشترك العددي الأكبر من كل حد وبإخراج الرمز الجبري المشترك بأكبر قوة من كل الحدود.

فعلى سبيل المثال إذا أردنا تحليل $8x^3+10x$ فإن:

$$8x^3 = \underline{2}\times 2\times 2\times \underline{x}\times x\times x \;.$$

$$10x = \underline{2}\times 5\times \underline{x} \;.$$

وبالتالي العامل المشترك الأكبر هو $2x$ ويكون تحليل $8x^2+10x$ كالتالي:

$$8x^3+10x = (2x)\left(4x^2+5\right) .$$

حيث أن كثير الحدود $\left(4x^2+5\right)$ ناتج قسمة كثير الحدود $8x^2+10x$ على العامل المشترك الأكبر $2x$.

مثال (9):

حلل العبارات الجبرية التالية بأخذ العامل المشترك الأكبر:

1. $2x+x^2$.
2. $3x^2-6xy$.
3. $9x^2y^3-6x^3y^2+3x^4y$.
4. $2x(y-z)-7(y-z)$.

الحل:

1. $2x = 2\times \underline{x}$.

$x^2 = \underline{x}\times x$.

إذاً العامل المشترك الأكبر هو x وإذا قسمنا $2x + x^2$ على العامل المشترك الأكبر x فإن ناتج القسمة هو:

$$\frac{2x + x^2}{x} = \frac{2x}{x} + \frac{x^2}{x} = 2 + x \ .$$

وبالتالي فإن:

$$2x + x^2 = (x)(2 + x) \ .$$

2. $3x^2 = \underline{3} \times \underline{x} \times x \ .$

$6xy = 2 \times \underline{3} \times \underline{x} \times y \ .$

إذاً العامل المشترك الأكبر هو $3x$ وإذا قسمنا $3x^2 - 6xy$ على العامل المشترك الأكبر $3x$ فإن ناتج القسمة هو:

$$\frac{3x^2 - 6xy}{3x} = \frac{3x^2}{3x} - \frac{6xy}{3x} = x - 2y \ .$$

وبالتالي فإن:

$$3x^2 - 6xy = (3x)(x - 2y) \ .$$

3. $9x^2y^3 = \underline{3} \times 3 \times \underline{x} \times \underline{x} \times \underline{y} \times y \times y \ .$

$6x^3y^2 = 2 \times \underline{3} \times \underline{x} \times \underline{x} \times x \times \underline{y} \times y \ .$

$3x^4y = \underline{3} \times \underline{x} \times \underline{x} \times x \times x \times \underline{y} \ .$

إذاً العامل المشترك الأكبر هو $3x^2y$ وإذا قسمنا $9x^2y^3 - 6x^3y^2 + 3x^4y$ على العامل المشترك الأكبر $3x^2y$ فإن ناتج القسمة هو:

$$\frac{9x^2y^3 - 6x^3y^2 + 3x^4y}{3x^2y} = \frac{9x^2y^3}{3x^2y} - \frac{6x^3y^2}{3x^2y} + \frac{3x^4y}{3x^2y}$$
$$= 3y^2 - 2xy + x^2 .$$

وبالتالي فإن:

$$9x^2y^3 - 6x^3y^2 + 3x^4y = \left(3x^2y\right)\left(3y^2 - 2xy + x^2\right) .$$

4. $2x(y-z) = 2 \times x \times \underline{(y-z)}$.

$7(y-z) = 7 \times \underline{(y-z)}$.

إذاً العامل المشترك الأكبر هو $(y-z)$ وإذا قسمنا $2x(y-z) - 7(y-z)$ على العامل المشترك الأكبر $(y-z)$ فإن ناتج القسمة هو:

$$\frac{2x(y-z) - 7(y-z)}{(y-z)} = \frac{2x(y-z)}{(y-z)} - \frac{7(y-z)}{(y-z)} = 2x - 7 .$$

وبالتالي فإن:

$$2x(y-z) - 7(y-z) = (y-z)(2x-7) .$$

ومن الممكن أحياناً عندما يكون هناك أربعة حدود أن نستخدم طريقة تسمى التحليل بالتجزئة. فنجزيء الحدود الأربعة إلى مجموعتين بحيث نضع كل حدان لهما عامل مشترك في مجموعة. انظر المثال التالي:

مثال (10):

حلل $2xy-4wx+yz-2wz$.

الحل:

أولاً نجزيء الحدود الأربعة إلى مجموعتين بحيث كل حدان لهما عامل مشترك أي الصيغة:

$$2xy-4wx+yz-2wz=(2xy-4wx)+(yz-2wz)\ .$$

ثانياً نحلل كل مجموعة بأخذ العامل المشترك الأكبر فينتج لدينا :

$$(2xy-4wx)+(yz-2wz)=2x(y-2w)+z(y-2w)\ .$$

نلاحظ أن العاملين المشتركين لكلا المجموعتين متساويان، وبالتالي نأخذهما كعامل مشترك بين المجموعتين لنحصل على:

$$2x(y-2w)+z(y-2w)=(y-2w)(2x+z)\ .$$

أي نحصل على التحليل:

$$2xy-4wx+yz-2wz=(y-2w)(2x+z)$$

مثال (11):

حلل مايلي:

1. $6xw+9xz-2yw-3yz$.
2. $2xy+15zw-3xw-10yz$.

الحل:

1. $6xw+9xz-2yw-3yz=(6xw+9xz)-(2yw+3yz)$

$$=3x(2w+3z)-y(2w+3z)$$

$$=(2w+3z)(3x-y)\ .$$

2. $2xy + 15zw - 3xw - 10yz = 2xy - 3xw + 15zw - 10yz$

$$= (2xy - 3xw) + (15zw - 10yz)$$

$$= x(2y - 3w) + 5z(3w - 2y) .$$

وبأخذ العدد -1 كعامل مشترك من $(3w - 2y)$ فإنها تصبح $-1(2y - 3w)$
وبالتالي فإن التحليل يصبح:

$$2xy + 15zw - 3xw - 10yz = x(2y - 3w) - 5z(2y - 3w)$$

$$= (2y - 3w)(x - 5z) .$$

ثلاثي الحدود:

هو أي كثيرة حدود من الدرجة الثانية في المتغير x أي على الصورة:

$$ax^2 + bx + c .$$

حيث $a,b,c \in \mathbb{R}$ و $a \neq 0$.

ولتحليل ثلاثي الحدود هناك حالتين إما $a = 1$ أو $a \neq 1$.

الحالة الأولى: إذا كان معامل x^2 هو الواحد $(a = 1)$ فإن ثلاثي الحدود على الصورة $x^2 + bx + c$ وخطوات تحليله هي:

1. نرتب الحدود تنازلياً حسب قوى x .
2. نبحث عن عددين d و e بحيث $c = de$ و $b = d + e$.
3. ينتج لدينا $x^2 + bx + c = (x + d)(x + e)$.

ملحوظات:

1. إذا كان الحد الأخير c موجباً فإن العددين d و e لهما نفس الإشارة و إشارتهما هي نفس إشارة العدد b .
2. أما إذا كان الحد الأخير c سالباً فإن العددين d و e مختلفي الإشارة وأكبرهما قيمة عددية له نفس إشارة العدد b .

مثال (12):

حلل كل مما يلي:

1. x^2+5x+6 .
2. $x^2-7x+10$.
3. x^2+2x-8 .
4. x^2-x-12 .

الحل:

1. نحلل العدد (6) إلى عاملين حاصل ضربهما يساوي 6 ومجموعهما يساوي 5 وبالتالي العددين هما (3 و 2) وإشارة العددين موجبة لأن إشارة الحد الاخير (6) موجبة وإشارة معامل الحد الثاني (5) موجبة:

$$x^2+5x+6=(x+3)(x+2) .$$

2. نحلل العدد (10) إلى عاملين حاصل ضربهما يساوي 10 ومجموعهما يساوي 7 وبالتالي العددين هما (2– و 5–) وإشارة العددين سالبة لأن إشارة الحد الأخير (10) موجبة وإشارة معامل الحد الثاني (7–) سالبة:

$$x^2-7x+10=(x-5)(x-2) .$$

3. نحلل العدد (8–) إلى عاملين حاصل ضربهما يساوي 8– ومجموعهما يساوي 2 وبالتالي العددين هما (2– و 4) و العددين مختلفين في الإشارة لأن إشارة الحد الأخير (8–) سالبة ووضعنا للعدد الأكبر (4) إشارة موجبة لأن إشارة معامل الحد الثاني (2) موجبة:

$$x^2+2x-8=(x+4)(x-2) .$$

4. نحلل العدد (-12) إلى عاملين حاصل ضربهما يساوي -12 ومجموعهما يساوي -1 وبالتالي العددين هما (3 و -4) و العددين مختلفين في الإشارة لأن إشارة الحد الأخير (-12) سالبة ووضعنا للعدد الأكبر (4) إشارة سالبة لأن إشارة معامل الحد الثاني (-1) سالبة:

$$x^2 - x - 12 = (x-4)(x+3) \ .$$

الحالة الثانية: إذا كان معامل x^2 لايساوي واحد $(a \neq 1)$ فإننا نستخدم طريقة المقص اللتي نوردها في المثال التالي:

مثال (13):

حلل ما يلي $6x^2 + 11x - 10$:

الحل:

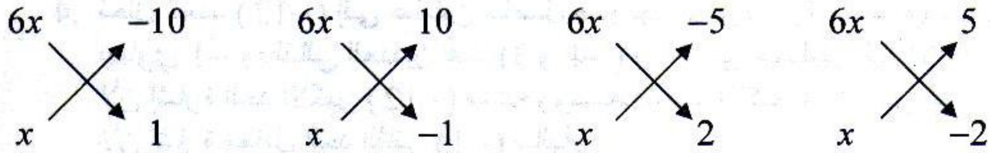
لتحليل $6x^2 + 11x - 10$ نحلل الحد الأول $(6x^2)$ إلى عاملين كلاهما يحتوي على المتغير x :

إما $6x^2 = (6x)(x)$ أو $6x^2 = (3x)(2x)$.

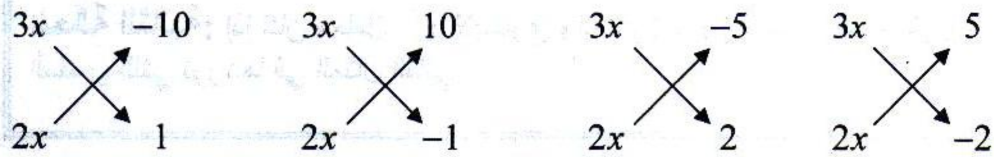
ونحلل الحد الأخير (-10) إلى عوامله الممكنة:

إما $-10 = (-10)(1) = (10)(-1)$ أو $-10 = (-5)(2) = (5)(-2)$

ثم نرسم سهمين متقاطعين ونضع كل تحليل لـ $(6x^2)$ مع كل تحليل للحد الأخير (-10) كالتالي:



$(6x+1)(x-10)$ $(6x-1)(x+10)$ $(6x+2)(x-5)$ $(6x-2)(x+5)$



$(3x+1)(2x-10)$ $(3x-1)(2x+10)$ $(3x+2)(2x-5)$ $(3x-2)(2x+5)$

ثم نضرب كل قوسين لنجد أيهما يكون حاصل ضربهما $6x^2+11x-10$. وبالتالي فإن بعد عمليات الضرب يكون:

$$6x^2+11x-10=(3x-2)(2x+5) .$$

الفرق بين مربعين:

يقال للعبارة الجبرية x^2-y^2 بأنها فرق بين مربعين. وتحليل على الصيغة:

$$x^2-y^2=(x-y)(x+y) .$$

تحليل الفرق بين مربعين:

(الحد الأول)² − (الحد الثاني)² = (الحد الأول − الحد الثاني)(الحد الأول + الحد الثاني) .

مثال (14):

حلل كل ممايلي:

1. x^2-4 .
2. $1-9x^2$.
3. $4x^2-25y^2$.
4. $16x^2y^2-\frac{1}{36}$.
5. $18x^3-8x$.
6. $25x^4-49y^6$.

الحل:

1. $x^2-4=(x)^2-(2)^2=(x-2)(x+2)$.

2. $1-9x^2=(1)^2-(3x)^2=(1-3x)(1+3x)$.

3. $4x^2-25y^2=(2x)^2-(5y)^2=(2x-5y)(2x+5y)$.

4. $16x^2y^2-\frac{1}{36}=(4xy)^2-\left(\frac{1}{6}\right)^2=\left(4xy-\frac{1}{6}\right)\left(4xy+\frac{1}{6}\right)$.

5. $18x^3-8x=(2x)(9x^2-4)=(2x)\left((3x)^2-(2)^2\right)$

$$=(2x)(3x-2)(3x+2) .$$

6. $25x^4-49y^6=(5x^2)^2-(7y^3)^2=(5x^2-7y^3)(5x^2+7y^3)$.

ملحوظة:

لا يمكن تحليل مجموع المربعين x^2+y^2 . على سبيل المثال لايمكن تحليل x^2+4 .

فرق ومجموع مكعبين:

يقال للعبارة الجبريـة $x^3 - y^3$ بأنها فرق بين مكعبين وللعبارة الجبريـة $x^3 + y^3$ بأنها مجموع مكعبين وتحليل هاتين العبارتين الجبريتين على االصيغتين:

$$x^3 \pm y^3 = (x \pm y)(x^2 \mp xy + y^2) .$$

تحليل فرق ومجموع مكعبين:

(الحد الأول)^3 ± (الحد الثاني)^3 =

(الحد الأول ± الحد الثاني) ((الحد الأول)^2 ∓ الحد الأول ضرب الحد الثاني + (الحد الثاني)^2)

مثال (15):

حل كل ممايلي:

1. $x^3 - 8$.
2. $27x^3 + 1$.
3. $x^6 - 125y^3$.
4. $3x^3 - 24$.
5. $64x^3 + \frac{1}{27}y^3$.
6. $2x^4 + 16xy^3$.

الحل:

1. $x^3 - 8 = (x)^3 - (2)^3 = (x - 2)(x^2 + 2x + 4)$.

2. $27x^3+1=(3x)^3+(1)^3=(3x+1)(9x^2-3x+1)$.

3. $x^6-125y^3=(x^2)^3-(5y)^3$

$=(x^2-5y)(x^4+5x^2y+25y^2)$.

4. $3x^3-24=(3)(x^3-8)=(3)((x)^3-(2)^3)$

$=(3)(x-2)(x^2+2x+4)$.

5. $64x^3+\frac{1}{27}y^3=(4x)^3+\left(\frac{1}{3}y\right)^3$

$=\left(4x+\frac{1}{3}y\right)\left(16x^2-\frac{4}{3}xy+\frac{1}{9}y^2\right)$.

6. $2x^4+16xy^3=(2x)(x^3+8y^3)=(2x)((x)^3+(2y)^3)$

$=(2x)(x+2y)(x^2-2xy+4y^2)$.

تمارين

1. حدد درجة كل من العبارات الجبرية التالية:

a) $4x^3 - 2x + 1$.
b) $6x^4y - 5x^3y^3 + 2xy^2$.

c) $10x^2y^3z - 3x^2yz^5$.
d) $7y^3 + 2y^2 - 5xy$.

e) $\left(2y^2 - y\right)^2$.
f) $\left(y^3 - 2y^2\right)\left(3y^2 + y\right)$.

2. ضع كلاً مما يلي في أبسط صورة:

a) $2x + 8 - 5x - 1$.
b) $3x - 9x - 7 + x + 7x + 2$.

c) $-3x + 2y - 5x - 7y$.
d) $4y^2 - 5y^2 + 3y - y^2 - 8y$.

e) $(2x + y) - 4(x + 2y)$.
f) $(2x - 3y + 2) - 3(2x + 7y)$.

g) $(2x + 7)(3x - 5)$.
h) $2\left(3x^2 - 5x\right) - \left(2x^2 - 2x - 5\right)$.

i) $(x - 1)(x + 1)(x + 2)$.
j) $\left(5x^2 - 4y^2\right)\left(5x^2 + 4y^2\right)$.

k) $\left(2x^2-3\right)^2$.

l) $\left(5x^2y\right)\left(2x^2-3xy-4\right)$.

m) $(x+2y)^2$.

n) $\left(3x^2-xy+y^2\right)(2x-y)$.

o) $\dfrac{3x^4y^2}{x^2y^2}$.

p) $(3x+2y)\left(9x^2-6xy+4y^2\right)$.

q) $\dfrac{-6xy^2z^3}{3xyz^2}$.

r) $\dfrac{20x^4y^2-3x^5y^4+6x^3y^3}{4x^3y^2}$.

s) $\dfrac{15x^2y-12xy^3}{3xy}$.

t) $\dfrac{x^2y^3+5x^4y^3+2x^3y^5}{x^2y^2}$.

3. حلل العبارات الجبرية التالية:

a) $5x^2+10y^2x$.

b) $2xyz-4x^2y+6y^2x$.

c) $2x^2-3x$.

d) $x(x-5)-3(x-5)$.

e) $x^2-xy-xz+yz$.

f) $8x^3-1$.

g) $2x^3-16$.

h) $x^3y^3+8z^3$.

i) $1000x^3 + y^6$.

j) $27 - x^3$.

k) $4x^2 - 25$.

l) $2x^2 - 50y^2$.

m) $x^2 - (2x + y)^2$.

n) $\frac{1}{9}x^2y^2 - 100z^2$.

o) $6x^4 + 48x$.

p) $x^2 + 7x + 10$.

q) $x^2 - 2x - 15$.

r) $x^2 + 7x - 8$.

s) $x^2 - 10x + 9$.

t) $(x + 2)^2 - 1$.

u) $x^2 - 9x - 36$.

v) $3x^2 + 10x + 3$.

w) $9x^2 - 14x - 8$.

x) $2x^2 - 5x - 3$.

y) $6x^2 + x + 2$.

z) $4xz + 2yz - 2xw - yw$.

aa) $x^3 - x^2 + x - 1$.

bb) $(2x + y)^2 + (2x + y)$.

cc) $x^3 + x^2 + x + 1$.

dd) $6xz - yw + 2xw - 3zy$.

الفصل الثالث

المعادلات

(3 – 1) حل معادلة خطية في مجهول واحد

(3 – 2) حل معادلتين خطيتين في مجهولين

(3 – 3) حل معادلة من الدرجة الثانية في مجهول واحد

تمارين

المعادلات

إن المعادلات الرياضية تلعب دوراً كبيراً في علمي الاقتصاد والإدارة وسنقدم في هذا الباب بعض المعادلات المهمة في هذا المجال.

تعريف:

المعادلة في المجهول x عبارة عن صيغة جبرية تعبر عن علاقة التساوي بين عبارتين رياضيتين تحوي أحدهما أو كلاهما المجهول x .

ومن أمثلة المعادلات:

$$2x+5=9 \longrightarrow (1)$$

$$x^2=9 \longrightarrow (2)$$

$$x+3=x+4 \longrightarrow (3)$$

عندما نعوض عن المجهول x في المعادلة بعدد ما فإن العلاقة الناتجة قد تكون صحيحة أو خاطئة. فمثلاً في المعادلة (1) إذا وضعنا $x = 1$ لحصلنا على $9 = 7$ وهذه علاقة خاطئة، ولكن إذا وضعنا $x = 2$ في نفس المعادلة لحصلنا على:

$$2(2)+5=9 \quad \text{أي} \quad 9=9$$

وهذه علاقة صحيحة. ونسمي العدد 2 في هذه الحالة حلاً للمعادلة (1) أو جذراً لها. مجموعة الحلول لأية معادلة تسمى مجموعة الحل لهذه المعادلة. فمثلاً $x = 3$ هو حل من حلول المعادلة (2) وكذلك $x = -3$. لذا فإن مجموعة حلول المعادلة (2) هي $\{3,-3\}$. بينما مجموعة الحلول للمعادلة (1) هي $\{2\}$. أما المعادلة (3) فليس لها حل لأن إعطاء أي قيمة للمجهول x سينتج عنه علاقة خاطئة. رأينا مما سبق أنه قد يكون للمعادلة حل واحد أو أكثر من حل أو قد لايكون لها حل.

(3 – 1) حل معادلة خطية في مجهول واحد:

المعادلة الخطية هي المعادلة التي يمكن كتابتها بالصورة:

$ax + b = 0$ حيث a , b أعداد حقيقية و $a \neq 0$.

ونستخدم العمليات الجبرية لحل المعادلة الخطية، ويبدأ الحل بوضع المجهول x في طرف وباقي القيم في طرف اخر، ومن ثم إجراء عمليات تبسيط على المعادلة للوصول إلى النتيجة النهائية على الصورة $x = c$.

مثال (1):

حل المعادلات التالية:

1. $3x - 1 = 5$.
2. $4x - 5 = 2x + 3$.
3. $2(x + 10) + 16 = 9 - 3(2x - 1)$.

الحل:

1. $3x - 1 = 5$

$3x - 1 + 1 = 5 + 1$ جمع العدد 1 للطرفين

$3x = 6$ قسمة الطرفين على 3

$x = 2$.

وبذلك يكون $x = 2$ هو حل للمعادلة.

2. $4x - 5 = 2x + 3$

$4x - 2x = 3 + 5$ وضع المجاهيل في الطرف الأيسر والباقي في الطرف الاخر

قسمة الطرفين على 2 $2x = 8$

$x = 4$.

وبذلك يكون $x = 4$ هو حل للمعادلة.

3. $2(x+10)+16 = 9-3(2x-1)$

فك الأقواس $2x + 20 + 16 = 9 - 6x + 3$

تجميع الحدود المتشابهة $2x + 36 = 12 - 6x$

وضع المجاهيل في الطرف الأيسر والباقي في الطرف الاخر $2x + 6x = 12 - 36$

قسمة الطرفين على 8 $8x = -24$

$x = -3$.

وبذلك يكون $x = -3$ هو حل للمعادلة.

(3 – 2) حل معادلتين خطيتين في مجهولين:

المعادلة الخطية في مجهولين x , y تكون على الصورة:

$$ax + by = c \ .$$

حيث a , b , c أعداد حقيقية وكلا من العددين a , b لا يساوي الصفر.

وإذا كان لدينا معادلتان من نفس النوع:

$$a_1x + b_1y = c_1$$
$$a_2x + b_2y = c_2$$

فإننا نقول أن لدينا معادلتين خطيتين في مجهولين y , x ونحتاج إلى تحديد قيم هذين المجهولين اللذين يحققان المعادلتين في نفس الوقت ويمكن استخدام إحدى الطرق الاتية في حل هذا النظام من المعادلات الخطية:

الطريقة الأولى:

استنتاج قيمة أحد المجهولين بدلالة المجهول الاخر من احدى المعادلتين ثم التعويض بهذه القيمة في المعادلة الثانية، وبذلك يصبح لدينا معادلة ذات مجهول واحد نستطيع تحديد قيمته. وبالتعويض بهذه القيمة المحددة في أي من المعادلتين نحصل على قيمة المجهول الثاني.

مثال (2):

أوجد قيمة y , x التي تحقق المعادلتين:

$$2x + 3y = 2 \longrightarrow (1)$$

$$x - y = 6 \longrightarrow (2)$$

الحل: من المعادلة (2) تكون $x = 6 + y$. وبالتعويض بهذه القيمة في المعادلة (1) :

$$2(6+y)+3y = 2$$

$$12+2y+3y = 2$$

$$12+5y = 2$$

$$5y = 2-12$$

$$5y = -10$$

$$y = -2 .$$

وبتعويض $y = -2$ في المعادلة (1) أو في المعادلة (2) :

التعويض في المعادلة (1) أو التعويض في المعادلة (2)

$$2x+3(-2)=2$$
$$2x-6=2$$
$$2x=8$$
$$x=4\ .$$

$$x-(-2)=6$$
$$x+2=6$$
$$x=4\ .$$

فإن حل المعادلتين يتحقق عندما $x=4$ و $y=-2$.

الطريقة الثانية:

استبعاد أحد المجهولين بطرح المعادلتين بعد توحيد كل من الإشارة الجبرية وقيمة معامل المجهول الذي نريد استبعاده.

مثال (3):

أوجد قيمة y , x التي تحقق المعادلتين:

$$3x-y=5 \longrightarrow (1)$$

$$x+2y=4 \longrightarrow (2)$$

الحل:

بضرب المعادلة (1) في العدد -2 تصبح المعادلة كالتالي:

$$-6x+2y=-10 \longrightarrow (3)$$

نطرح المعادلة (2) من المعادلة (3) :

$$\begin{array}{r} -6x+2y=-10 \\ -\quad x+2y=4 \\ \hline -7x \qquad =-14 \end{array}$$

إذاً ناتج الطرح هي المعادلة $-7x=-14$. ونجد قيمة x بالقسمة على -7 .

$$x=\frac{-14}{-7}=2$$

ولإيجاد قيمة y نعوض $x=2$ في المعادلة (2) :

$$2+2y=4$$

$$2y=4-2=2$$

$$y=1 .$$

و أيضاً يمكن التعويض بالمعادلة (2) لإيجاد قيمة y .

ويمكن ايجاد قيمة y , x بضرب المعادلة (2) في العدد 3 فتصبح المعادلة كالتالي:

$$3x+6y=12 \longrightarrow (4)$$

نطرح المعادلة (1) من المعادلة (4) :

$$\begin{array}{r} 3x+6y=12 \\ -\quad 3x-y=5 \\ \hline 7y=7 \end{array}$$

ناتج الطرح هي المعادلة $7y=7$. وبالقسمة على 7 نجد قيمة $y=1$. وبالتعويض في المعادلة (2) .

$$x+2(1)=4$$

$$x + 2 = 4$$

$$x = 4 - 2 = 2$$

$$x = 2 \ .$$

إذاً حل المعادلتين يتحقق عندما $x = 2$ و $y = 1$.

مثال (4):

أوجد قيم y , x التي تحقق المعادلتين:

$$4x + 3y = 13 \longrightarrow (1)$$

$$3x + 2y = 9 \longrightarrow (2)$$

الحل:

في هذا المثال إذا أردنا استبعاد المجهول x نضرب المعادلة (1) في العدد 3 والمعادلة (2) في العدد 4 فتصبح المعادلتين كالتالي:

$$12x + 9y = 39 \longrightarrow (3)$$

$$12x + 8y = 36 \longrightarrow (4)$$

نطرح المعادلة (4) من المعادلة (3) وينتج $y = 3$, وبالتعويض بالمعادلة (2) :

$$3x + 2(3) = 9$$

$$3x + 6 = 9$$

$$3x = 9 - 6 = 3$$

$$x = 1 \ .$$

ويمكن حل النظام باستبعاد المجهول y ، بضرب المعادلة (1) في العدد 2 والمعادلة (2) في العدد 3 فتصبح المعادلتين كالتالي:

$$8x + 6y = 26 \longrightarrow (5)$$

$$9x + 6y = 27 \longrightarrow (6)$$

نطرح المعادلة (6) من المعادلة (5) وينتج $x = 1$ ، وبالتعويض بالمعادلة (2) :

$$3(1) + 2y = 9$$

$$3 + 2y = 9$$

$$2y = 9 - 3 = 6$$

$$y = 3 .$$

إذاً حل المعادلتين يتحقق عندما $x = 1$ و $y = 3$.

(3 – 3) حل معادلة من الدرجة الثانية في مجهول واحد:

معادلة الدرجة الثانية في مجهول واحد x هي المعادلة التي يمكن كتابتها على الصورة:

$$ax^2 + bx + c = 0 .$$

حيث a , b , c أعداد حقيقية و $a \neq 0$ ، و تحل هذه المعادلة باستخدام القانون العام:

$$\boxed{x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}$$

نسمي المقدار $b^2 - 4ac$ بالمميز وهو يحدد هل للمعادلة جذور وعددها إذا وجدت حسب القاعة التالية :

1. $b^2 - 4ac > 0$ للمعادلة جذرين حقيقيين.
2. $b^2 - 4ac = 0$ للمعادلة جذر حقيقي واحد.
3. $b^2 - 4ac < 0$ فلا يوجد جذور للمعادلة.

مثال (5):

حل كل من المعادلات التالية:

1. $2x^2 = 3x + 2$.
2. $x^2 - 6x + 9 = 0$.
3. $3x^2 + 2x = -1$.

الحل:

1. نحول المعادلة إلى الصورة العامة فتصبح:

$$2x^2 - 3x - 2 = 0 .$$

نجد قيمة المميز علما أن $a = 2 \ , \ b = -3 \ , \ c = -2$:

$$b^2 - 4ac = (-3)^2 - 4(2)(-2)$$
$$= 9 + 16 = 25 .$$

بما أن المميز يساوي 25 فإن للمعادلة جذرين (أي حلين) حقيقيين. وسنستخدم القانون العام لإيجادها.

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{-(-3)\pm\sqrt{25}}{2(2)}=\frac{3\pm 5}{4}\ .$$

وبذلك يكون حل المعادلة هو:

إما

$$x=\frac{3-5}{4}=\frac{-1}{2}$$
$$\Rightarrow x=\frac{-1}{2}\ .$$

أو

$$x=\frac{3+5}{4}=\frac{8}{4}$$
$$\Rightarrow x=2\ .$$

2. إن المعادلة بالصورة العامة, فنجد قيمة المميز مباشرة علما أن $a=1\ ,\ b=-6\ ,\ c=9$:

$$b^2-4ac=(-6)^2-4(1)(9)$$
$$=36-36=0\ .$$

بما أن المميز يساوي 0 فإن للمعادلة جذر حقيقي واحد.

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{-(-6)\pm\sqrt{0}}{2(1)}=\frac{6}{2}=3\ .$$

وبذلك يكون حل المعادلة هو $x=3$.

3. نحول المعادلة إلى الصورة العامة فتصبح:

$$3x^2+2x+1=0\ .$$

نجد قيمة المميز علما أن $a=3 \ , \ b=2 \ , \ c=1$:

$$b^2-4ac=(2)^2-4(3)(1)=4-12=-8 \ .$$

بما أن المميز يساوي -8 (أي عدد سالب) فإنه ليس للمعادلة أي جذور حقيقية.

تمارين

1. حل كل من المعادلات التالية:

a) $2x + 5 = 13$.

b) $3x - 4 = 8$.

c) $4(x + 2) = 6x - 10$.

d) $3(6x + 2) = 2(4x - 5)$.

e) $3x + 2(1 - x) = 4 - 3x$.

f) $3x + y = -1$.
$2x - 3y = -8$.

g) $2x - 6y = 4$.
$x + 5y = 10$.

h) $4x + 5y = -6$.
$3x - 2y = 7$.

i) $6x - 4y = 0$.
$4x - 2y = -2$.

j) $5x + y = 14$.
$2y - 3x = 2$.

k) $3x^2 - 8x = 3$.

l) $5x^2 + 5x + 4 = 2$.

m) $x^2 = 8x + 16$.

n) $x^2 - 4x + 8 = 2x - 2$.

o) $-11x^2 = 10x - 1$.

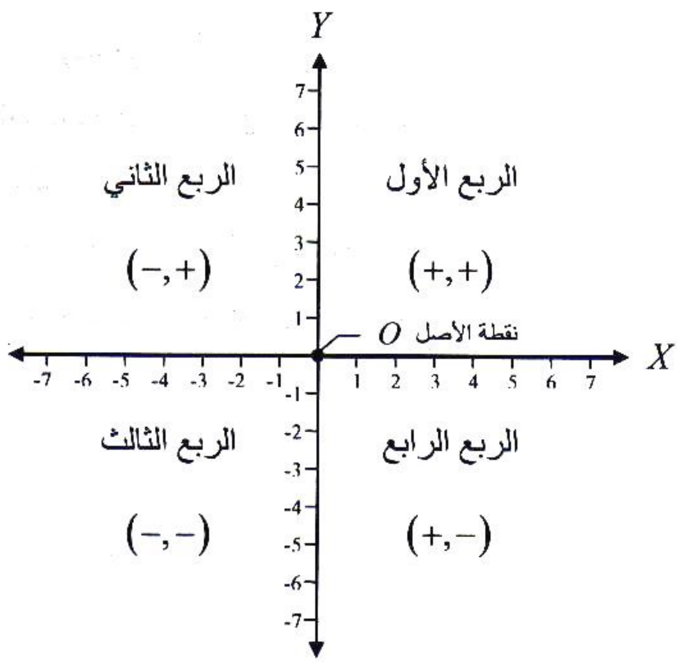
الفصل الرابع

الهندسة التحليلية

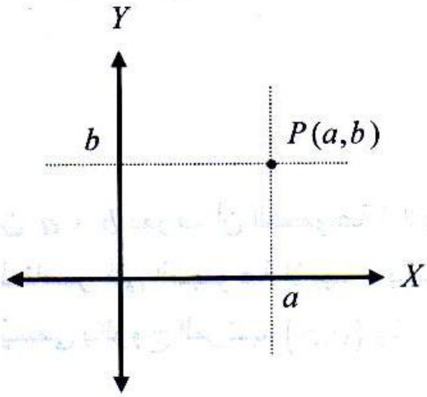
الهندسة التحليلية

(4 – 1) المستوى الديكارتي:

يتكون المستوى الديكارتي من خطين متعامدين ممثلاً على كل منها مجموعة الأعداد الحقيقية أحدهما أفقي ويسمى محور X والآخر عامودي ويسمى محور Y . ويتقاطعان في نقطة تسمى نقطة الأصل O . ويسميان معاً بالمحاور الإحداثية.

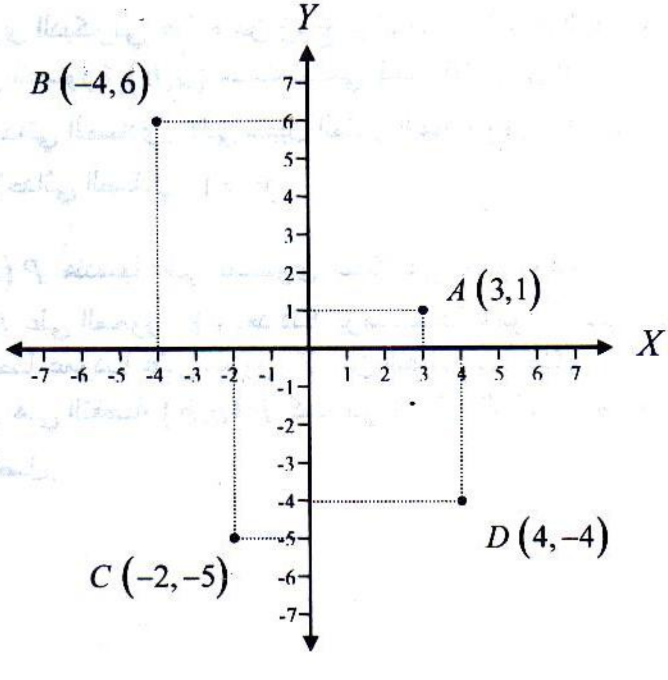


ومن الملاحظ أن المحاور الإحداثية تقسم المستوى الديكارتي إلى أربعة أقسام، وكل قسم يسمى (ربع). وتسمى الأعداد الواقعة على محور X بالإحداثيات السينية، وتكون إحداثيات محور X الواقعة على يمين نقطة الأصل موجبة أما الواقعة على يسار نقطة الأصل تكون سالبة. وتسمى الأعداد الواقعة على محور Y بالإحداثيات الصادية،



الشكل أدناه يمثل النقاط التالية في المستوى الديكارتي:

$$A\,(3,1) \quad B\,(-4,6) \quad C\,(-2,-5) \quad D\,(4,-4)$$



وتكون إحداثيات محور Y الواقعة فوق نقطة الأصل موجبة أما الواقعة تحت نقطة الأصل تكون سالبة .

الزوج المرتب:

ليكن لدينا عددين حقيقيين a ، b نعرف أن المجموعة $\{a,b\}$ هي نفسها المجموعة $\{b,a\}$ أي أن ترتيب العناصر في المجموعة لا يهم وبالمقابل إذا اعتبرنا الترتيب مهماً فنحصل على ما يُسمى بالزوج المرتب (a,b) وفي هذه الحالة لأي زوجين (a,b) ، (c,d) فإن:

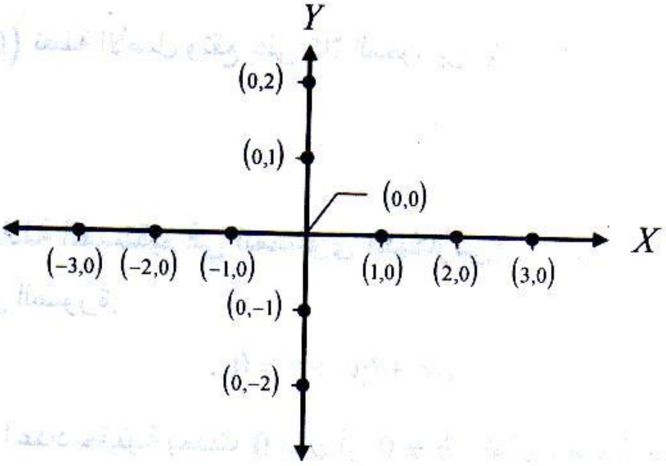
(a,b) لا يساوي (c,d) إلا في حالة أن $a=c$ ، $b=d$ وعلى وجه الخصوص (a,b) لا يساوي (b,a) إلا في حالة أن $a=b$ فمثلاً: $(3,2) \neq (2,3)$.

تمثيل نقطة في المستوى الديكارتي:

النقطة P في المستوى الديكارتي عبارة عن زوج مرتب من الأعداد الحقيقية. ويكتب الزوج المرتب على الصورة (a,b) حيث نسمي العدد الأول a الإحداثي السيني والعدد الثاني b الإحداثي الصادي. على سبيل المثال النقطة $P(3,1)$ لها الإحداثي السيني $x = 3$ و الإحداثي الصادي $y = 1$.

لتمثيل النقطة $P(a,b)$ هندسياً على المستوى الديكارتي نحدد موقع العدد a على المحور X وموقع b على المحور Y ، بعد ذلك نرسم خطاً عمودياً على محور X من النقطة a ، وخطاً عمودياً على محور Y من النقطة b ، فتكون نقطة تقاطع الخطين المرسومين هي النقطة $P(a,b)$ كما في الشكل التالي. علماً أن النقطة $(0,0)$ هي نقطة الأصل.

لاحظ أن النقاط التي تقع على محور X يكون الإحداثي الصادي لها يساوي صفر، والنقاط التي تقع على محور Y يكون الإحداثي السيني لها يساوي صفر، انظر الشكل التالي:



مثال (1):

حدد في أي ربع أو على أي محور تقع كل من النقاط التالية:

1. $(-4,2)$.
2. $(3,1)$.
3. $(0,-4)$.
4. $(6,-5)$.
5. $(-7,-9)$.
6. $(0,0)$.

الحل:

1. $(-4,2)$ تقع في الربع الثاني.
2. $(3,1)$ تقع في الربع الأول.
3. $(0,-4)$ تقع على محور Y .

4. $(6,-5)$ تقع في الربع الرابع.

5. $(-7,-9)$ تقع في الربع الثالث.

6. $(0,0)$ نقطة الأصل وتقع على كلا المحورين X ، Y .

(4 – 2) معادلة المستقيم في المستوى الديكارتي:

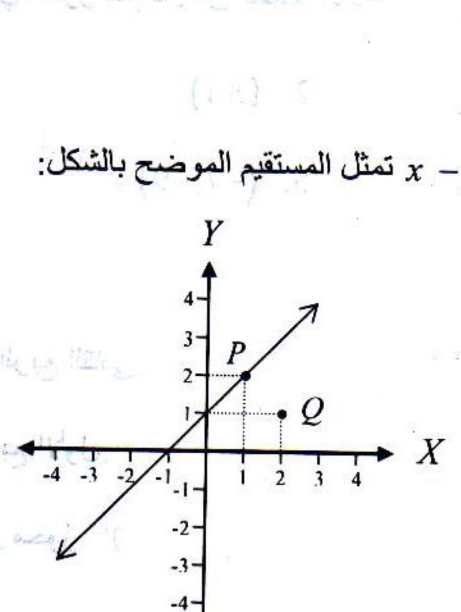
أي معادلة على الصورة:

$$ax + by + c = 0 \ .$$

حيث a,b,c أعداد حقيقية بحيث $a \neq 0$ أو $b \neq 0$ ، تمثل معادلة خط مستقيم في المستوى الديكارتي ويسمى الثابت a بمعامل x ، والثابت b بمعامل y . ونعني بمعادلة المستقيم أن أي نقطة $P(x_0,y_0)$ واقعة على المستقيم تحقق معادلته أي أن $ax_0 + by_0 + c = 0$ والعكس صحيح، أي نقطة $Q(x_1,y_1)$ تحقق المعادلة تكون واقعة على المستقيم.

مثال (2):

المعادلة $x - y + 1 = 0$ تمثل المستقيم الموضح بالشكل:



فنلاحظ أن النقطة $P(1,2)$ واقعة على المستقيم وتحقق المعادلة أعلاه.

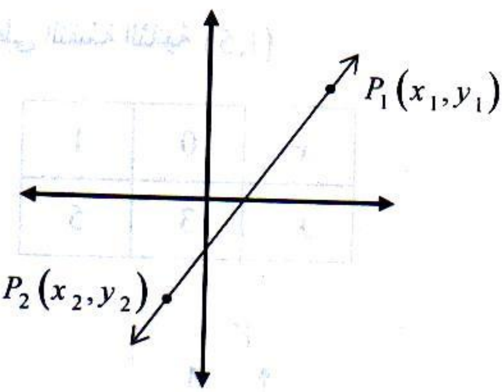
$$1-2+1=0\ .$$

أما النقطة $Q(2,1)$ فليست واقعة على المستقيم ولا تحقق معادلته:

$$2-1+1\neq 0\ .$$

تمثيل معادلة الخط المستقيم في المستوى الديكارتي:

يمكن تمثيل معادلة الخط المستقيم في المستوى الديكارتي بمعرفة نقطتين تقعان عليه. وذلك برسم المستقيم الواصل بين النقطتين والممتد من الجهتين. انظر الشكل:



مثال (3):

لرسم الخط المستقيم الممثل بالمعادلة: $2y-4x=6$

يكفي إيجاد نقطتين تقعان عليه وذلك بأخذ قيمتين نختارهما للمتغير x ثم نوجد قيمتي y المناظرتين من المعادلة أعلاه. على سبيل المثال نأخذ $x=0$ و $x=1$:

أولا: نوجد قيمة y عند $x=0$:

$$2y-4x=6$$
$$2y-4(0)=6$$
$$2y=6$$
$$y=3\,.$$

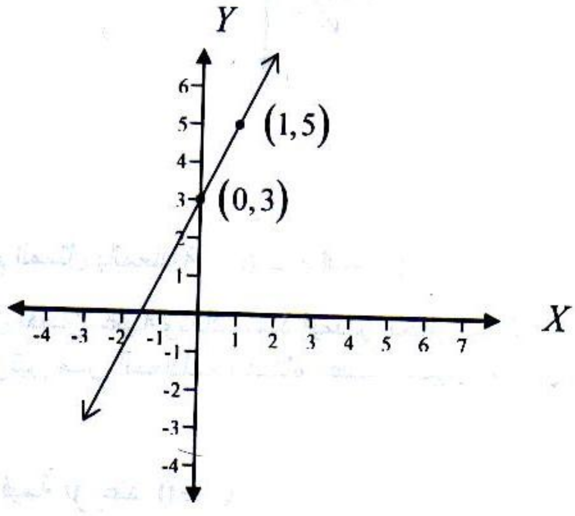
وبالتالي نحصل على النقطة الأولى $(0,3)$ على المستقيم المطلوب رسمه .

ثانياً: نوجد قيمة y عند $x=1$:

$$2y-4x=6$$
$$2y-4(1)=6$$
$$2y=10 \Rightarrow y=5\,.$$

وبالتالي نحصل على النقطة الثانية $(1,5)$.

x	0	1
y	3	5



مثال (4):

ارسم المستقيمات الممثلة للمعادلات التالية:

1. $y + 2x = 4$.   2. $y = 3$.   3. $x = -2$.

الحل:

1. نختار قيمتين لـ x مثل $x = 1$ و $x = 2$:

نجد قيمة y عند $x = 1$:

$$y + 2x = 4$$
$$y + 2(1) = 4$$
$$y = 2 .$$

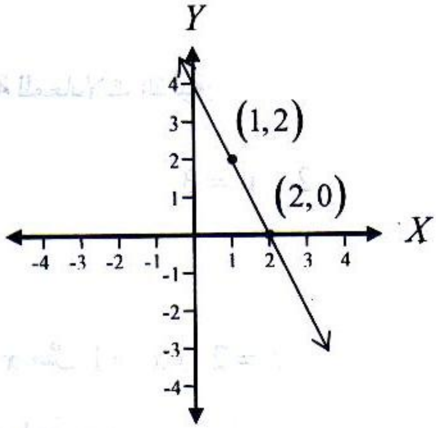
وبالتالي نحصل على النقطة الأولى $(1,2)$.

نجد قيمة y عند $x = 2$:

$$y + 2x = 4$$
$$y + 2(2) = 4$$
$$y = 0 .$$

وبالتالي نحصل على النقطة الثانية $(2,0)$.

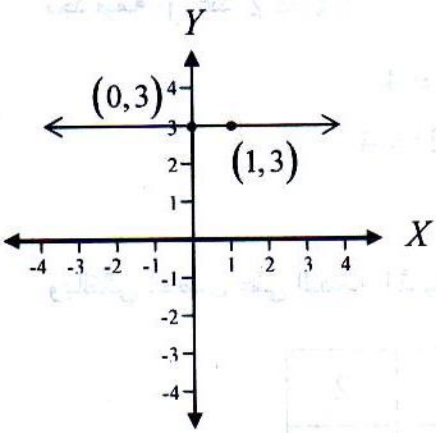
x	1	2
y	2	0



2. نقاط المستقيم الذي معادلته $y = 3$ لها الإحداثي الصادي y يساوي 3 أما الإحداثي السيني x فيأخذ أي قيمة نختارها.

بأخذ $x = 0$ فإن $y = 3$ وبالتالي النقطة الأولى $(0,3)$.

وعند $x = 1$ فإن $y = 3$ والنقطة الثانية هي $(1,3)$.

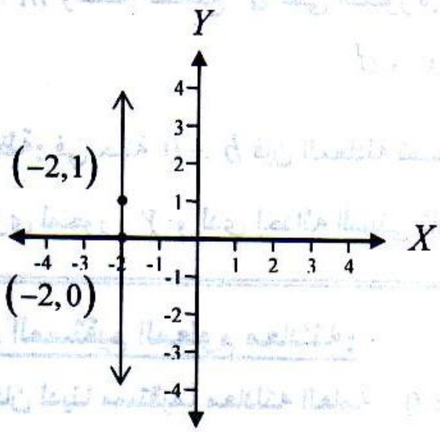


x	0	1
y	3	3

3. المستقيم $x = -2$ يضم جميع النقاط التي لها الإحداثي x دائما يساوي 2–
أما الإحداث الصادي y فيأخذ أي قيمة نختارها.

بأخذ $y = 0$ فإن $x = -2$ وبالتالي النقطة الأولى $(-2,0)$.

وبأخذ $y = 1$ فإن $x = -2$ وبالتالي النقطة الثانية $(-2,1)$.



x	-2	-2
y	0	1

(4 – 3) ميل المستقيم:

هناك صيغة أخرى لمعادلة الخط المستقيم والتي تتيح لنا معرفة معلومات إضافية عن الخط المستقيم .

لنعتبر المعادلة العامة للخط المستقيم:

$ax + by + c = 0$ والتي يمكن وضعها على الصورة:

$by = -ax - c$ وبفرض $b \neq 0$ نجد أن:

$$y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}$$

نسمي العدد $\left(-\dfrac{a}{b}\right)$ ميل المستقيم ونرمز لـه بـالرمز m والعـدد $\left(-\dfrac{c}{b}\right)$ يمثل نقطـة تقـاطع المـستقيم مـع محـور Y ونرمـز لـه بـالرمز d . فنحـصل علـى المعادلـة بدلالـة الميل m ونقطة التقاطع d على الصورة:

$$y = mx + d\ .$$

ملحوظة: في حالة $b = 0$ فإن المعادلة تصبح على الصورة $x = -\dfrac{c}{a}$ وهو المستقيم الموازي لمحور Y والذي إحداثه السيني ثابت. ولدينا الخلاصة التالية:

<u>ميل المستقيم المعلوم معادلته:</u>

إذا كان لدينا مستقيماً معادلته العامة $ax + by + c = 0$ فإن:

1. **ميل المـستقيم معرف فـي حالـة $b \neq 0$ ويـساوي $-\dfrac{a}{b}$ ويرمز لـه بـالرمز m** $\left(m = -\dfrac{a}{b}\right)$.
2. **في حالـة $b \neq 0$ فـإن $-\dfrac{c}{b}$ هـو الإحداثي الـصادي لنقطـة تقـاطع المـستقيم مـع محور الصادات ونرمز له بالرمز d $\left(d = -\dfrac{c}{b}\right)$ وتكون نقطـة التقاطع هي** $(0,d)$.
3. **فـي حالــة $a \neq 0$ فـإن نقطـة تقـاطع المـستقيم مـع محـور الـسينات X هــي** $\left(-\frac{c}{a},0\right)$.

ويمكن كتابـة معادلـة المـستقيم بدلالـة ميلـه m ونقطـة التقـاطع d مـع محـور Y على الصورة:

$$y = ma + d$$

مثال(5):

إذا كانت معادلة المستقيم هي: $4x + 2y = 12$.

أوجد مايلي:

1. ميل المستقيم.
2. نقطة تقاطع المستقيم مع محور الصادات Y .
3. نقطة تقاطع المستقيم مع محور السينات X .
4. أكتب معادلة الخط المستقيم بدلالة الميل ونقطة التقاطع مع محور Y .

الحل:

1. الصورة العامة لمعادلة المستقيم هي $4x + 2y - 12 = 0$ وبالتالي:

$$a = 4 \quad b = 2 \quad c = -12 \ .$$

وميل المستقيم هو:

$$m = -\frac{a}{b} = -\frac{4}{2} = -2 \ .$$

2. الإحداثي الصادي لتقاطع المستقيم مع محور الصادات Y هو:

$$d = -\frac{c}{b} = -\frac{-12}{2} = 6 \ .$$

إذاً نقطة تقاطع المستقيم مع محور الصادات Y هي $(0,6)$.

3. الإحداثي السيني لتقاطع المستقيم مع محور X هو:

$$-\frac{c}{a} = -\frac{-12}{4} = 3 \ .$$

إذاً نقطة تقاطع المستقيم مع محور السينات X هي $(3,0)$.

4. بما أن $m=-2$ و $d=6$ فإن:

$$y = mx + d$$
$$y = -2x + 6 .$$

مثال (6):

أكتب معادلة المستقيم الذي:

1. ميله يساوي -3 ويقطع محور الصادات Y في 5 .
2. ميله يساوي 4 ويقطع محور X في -2 .

الحل:

1. بما أن $m=-3$ و $d=5$ فإن معادلة المستقيم هي:

$$y = -3x + 5 \quad \text{أي} \quad y = mx + d .$$

2. بما أن $m=4$ و الخط يقطع محور X في -2 أي أن عند $x=-2$ فإن : $y=0$

$$y = 4x + d \quad \text{أي} \quad y = mx + d .$$

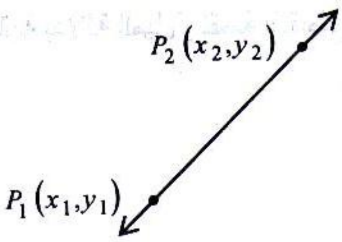
ونوجد قيمة d عن طريق تعويض قيمة $x=-2$ وقيمة $y=0$:

$$y = 4x + d$$
$$0 = 4(-2) + d$$
$$d = 8 .$$

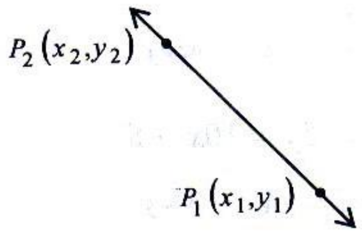
بالتالي فإن معادلة المستقيم هي:

$$y = 4x + 8 .$$

إذا كان المستقيم صاعداً من اليسار إلى اليمين فإن ميله يكون موجباً.



وإذا كان المستقيم صاعداً من اليمين إلى اليسار فإن ميله يكون سالباً.



وإذا كان المستقيم أفقياً فإن الميل يساوي صفراً لأن في هذه الحالة يكون $y_1 = y_2$ ويكون موازياً لمحور X .



$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{0}{x_2 - x_1} = 0 \ .$$

وإذا كان المستقيم رأسياً فإن الميل غير معرف (أي لايوجد ميل للخط المستقيم) لأنه في هذه الحالة يكون $x_1 = x_2$ ويكون موازياً لمحور Y .

مثال (7):

أكتب معادلة المستقيمات التالية بدلالة الميل ونقطة التقاطع مع محور الصادات Y :

1. $3x+2y+6=0$.
2. $5y-10x=5$.
3. $9x=3y+12$.

الحل:

1. $3x+2y+6=0 \Rightarrow 2y=-3x-6$.

   ومنه $y=-\dfrac{3}{2}x-3$.

2. $5y-10x=5 \Rightarrow 5y=10x+5$.

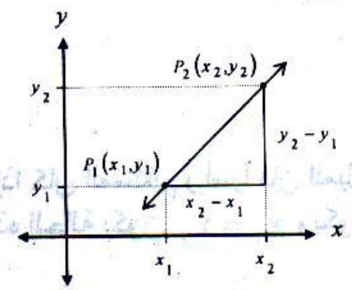
   ومنه $y=2x+1$.

3. $9x=3y+12 \Rightarrow 3y=9x-12$.

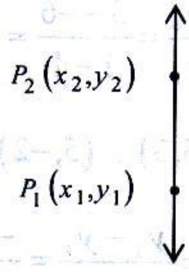
   ومنه $y=3x-4$.

ميل المستقيم بمعلومية نقطتين عليه:

إذا كانت $P_1(x_1,y_1)$ و $P_2(x_2,y_2)$ نقطتين تقعان على مستقيم فإن ميله هو:



$$m=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{\text{التغــــــير في } y}{\text{التغــــــير في } x} .$$



$$m=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{y_2-y_1}{0} .$$

ومن المتفق عليه أن القسمة على 0 غير معرفة .

مثال (8):

أوجد ميل المستقيم الذي يمر بالنقطتين الموضحتين في كل مما يلي:

1. $(0,4)$, $(2,12)$.
2. $(4,-6)$, $(1,3)$.
3. $(5,3)$, $(5,-2)$.
4. $(2,-1)$, $(7,-1)$.

الحل:

1. لنعتبر $x_1=0$ و $y_1=4$ و $x_2=2$ و $y_2=12$ عندئذٍ ميل المستقيم المار بالنقطتين (x_1,y_1) , (x_2,y_2) هو:

$$m=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{12-4}{2-0}=\frac{8}{2}=4 .$$

2. المستقيم يمر بالنقطتين $(1,3)$, $(4,-6)$ وبالتالي:

$$m=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{3--6}{1-4}=\frac{9}{-3}=-3\ .$$

3. المستقيم يمر بالنقطتين $(5,-2)$, $(5,3)$ وبالتالي :

$$m=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{-2-3}{5-5}=\frac{-5}{0}$$ غير معرف .

وهذا يعني أن المستقيم المار بالنقطتين $(5,-2),(5,3)$ يوازي المحور الصادي Y .

4. المستقيم يمر بالنقطتين $(7,-1)$, $(2,-1)$ وبالتالي:

$$m=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{-1--1}{7-2}=\frac{0}{5}=0\ .$$

بما أن الميل صفر فإن الخط المار بالنقطتين $(7,-1),(2,-1)$ يوازي المحور X .

(4 – 4) معادلة المستقيم بدلالة ميله ونقطة عليه:

<u>معادلة المستقيم بمعلومية ميله ونقطة عليه:</u>

إذا كان لدينا الميل m لخط مستقيم ونقطة $P(x_1,y_1)$ واقعة عليه فإن معادلة المستقيم بمعلومية الميل وهذه النقطة الواقعة عليه هي:

$$y-y_1=m(x-x_1)\ .$$

مثال (9):

أكتب معادلة الخط المستقيم الذي ميله 4 ويمر بالنقطة $(2,-3)$.

الحل:

بما أن ميل الخط المستقيم $m = 4$ ويمر بالنقطة $(2,-3)$. فإن معادلة المستقيم على الصورة:

$$y - y_1 = m\left(x - x_1\right).$$

أي
$$y - (-3) = 4\left(x - 2\right).$$

ومنه
$$y + 3 = 4x - 8.$$

والمعادلة المطلوبة هي: $y = 4x - 11$.

ملحوظات:

1. معادلة المستقيم الأفقي (أي الميل صفراً) والمار بالنقطة $P\left(x_1,y_1\right)$ هي $y = y_1$.
2. معادلة المستقيم الرأسي (أي الميل غير معرف) والمار بالنقطة $P\left(x_1,y_1\right)$ هي $x = x_1$.

مثال (10):

أوجد معادلة المستقيم في كل مما يلي:

1. ميله يساوي 2− ويقطع المحور Y في 3− .
2. يوازي المحور X ويقطع المحور Y في 2 .
3. يوازي المحور Y ويقطع المحور X في 1− .

الحل:

1. ميل المستقيم $m = -2$ ويقطع محور Y في -3 أي يمر بالنقطة $(0,-3)$ وبالتالي معادلته هي:

$$y - y_1 = m\left(x - x_1\right)$$

$$y - -3 = -2\left(x - 0\right)$$

$$y + 3 = -2x$$

$$y = -2x - 3\ .$$

2. بما أن المستقيم موازٍ للمحور X فإن $m = 0$ وبما أنه يقطع محور Y في 2 فإنه يمر بالنقطة $(0,2)$ ومعادلته هي:

$$y - y_1 = m\left(x - x_1\right)$$

$$y - 2 = 0\left(x - 0\right)$$

أي $y = 2$.

3. بما أن الخط موازٍ لمحور Y فإن الميل غير معرف وبما أن الخط يقطع محور X في -1 فإنه يمر بالنقطة $(-1,0)$ ومعادلته هي:

$$x = -1\ .$$

(4 – 5) معادلة المستقيم المار بنقطتين معلومتين:

معادلة المستقيم المار بنقطتين معلومتين:

إذا كان لدينا مستقيم مار بنقطتين معلومتين $P_1(x_1,y_1)$ و $P_2(x_2,y_2)$ بحيث $x_1 \neq x_2$ فإن معادلة هذا المستقيم هي:

$$y - y_1 = m(x - x_1) \quad \text{حيث} \quad m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} .$$

لاحظ عندما $x_1 = x_2$ فإن المستقيم موازٍ لمحور Y .

مثال (11):

أوجد معادلة المستقيم الذي:

1. يمر بالنقطتين $P_1(3,-5)$ و $P_2(-1,-1)$.
2. يمر بالنقطة $P(2,4)$ ويقطع المحور Y في -2 .

الحل:

1. ميل المستقيم بدلالة النقطتين الواقعتين عليه $P_1(3,-5)$ و $P_2(-1,-1)$ هو :

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{-1-(-5)}{-1-3} = \frac{4}{-4} = -1 .$$

الآن نوجد معادلة المستقيم بدلالة ميله $m = -1$ والنقطة الواقعة عليه $(3,-5)$ (يمكن استخدام النقطة الثانية $(-1,-1)$ وهذا لا يؤثر في الحل):

$$y - y_1 = m\left(x - x_1\right)$$

$$y - -5 = -1(x - 3)$$

$$y + 5 = -x + 3$$

ومنه المعادلة المطلوبة $y = -x - 2$.

2. لدينا النقطة الأولى هي $(2,4)$ وبما أن المستقيم يقطع المحور Y في -2 فإن النقطة الثانية هي $(0,-2)$ ، وبالتالي نحصل على ميل المستقيم:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{-2-4}{0-2} = \frac{-6}{-2} = 3 \ .$$

الآن بمعلومية الميل $m = 3$ والنقطة $(2,4)$ الواقعة على المستقيم نحل على المعادلة :

$$y - y_1 = m\left(x - x_1\right)$$

$$y - 4 = 3(x - 2)$$

$$y - 4 = 3x - 6$$

والمعادلة المطلوبة هي : $y = 3x - 2$.

تمارين

1. حدد كلٍ من النقاط التالية في المستوى الديكارتي:

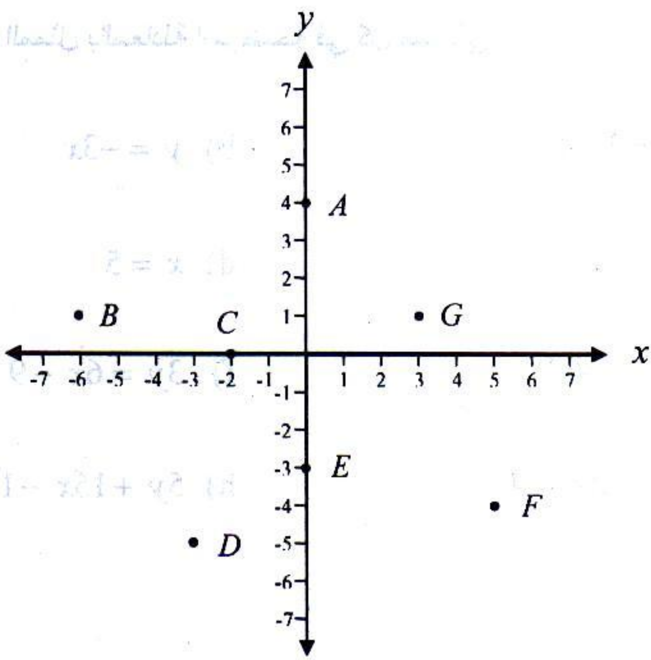
a) $A\,(0,-7)$ b) $B\,(-6,1)$

c) $C\,(-3,-4)$ d) $D\,(-2,0)$

e) $E\,(5,3)$ f) $H\,(4,-3)$

g) $G\,(1.5,-1)$ h) $I\left(\frac{1}{2},2\right)$

2. في الشكل التالي حدد إحداثيات النقاط $A\,,B\,,C\,,D\,,E\,,F\,,G$ الموضحة:



3. حدد في أي ربع أو على أي محور تقع كلّ من النقاط التالية في المستوى الديكارتي:

a) $A\,(10,-6)$

b) $B\,(0,-3)$

c) $C\,(-4\,,-9)$

d) $D\,(-5,0)$

e) $E\,(0,0)$

f) $F\,(-6,8)$

g) $G\left(9,\frac{1}{2}\right)$

h) $H\left(-\frac{3}{2}\,,0\right)$

i) $I\,(0.3\,,-0.2)$

j) $G\,(-1\,,0.001\,)$

4. ارسم المستقيم الممثل بالمعادلة الموضحة في كل مما يلي:

a) $y=2x+2$

b) $y=-3x$

c) $y=-2$

d) $x=5$

e) $4y=-6x$

f) $3y=6x-9$

g) $4y-2x=4$

h) $5y+15x-10=0$

5. أوجد ميل المستقيم ونقطة تقاطعه مع محور Y ونقطة التقاطع مع محور X في كل مما يلي:

a) $y = 3x - 4$ b) $y = -\frac{1}{4}x - \frac{3}{4}$

c) $y = 6$ d) $x = -3$

e) $y + 2x = 0$ f) $-4y = 8x + 12$

g) $20x + 5y = 50$ h) $10x - 4y + 10 = -6$

6. أوجد ميل المستقيم المار بالنقطتين A و B في كل مما يلي:

a) $A(-4,6)\quad B(-1,18)$ b) $A(6,2)\quad B(-3,5)$

c) $A\left(\frac{2}{3},\frac{1}{2}\right)\quad B(-1,2)$ d) $A(-5,-3)\quad B(-5,3)$

e) $A(-3,4)\quad B(2,4)$ f) $A(1,-3)\quad B(-3,-11)$

7. أوجد معادلة المستقيم الذي يحقق الشروط الموضحة في كل مما يلي:

a) ميله $m = \frac{1}{2}$ ويمر بالنقطة $A(4,-2)$.

b) ميله $m = -3$ ويقطع المحور Y في 5 .

c) يقطع المحور Y في 8 والمحور X في -4 .

d) ميله $m = 6$ ويقطع المحور X في -2 .

e) يمر بالنقطتين $A\left(-5,-7\right)$ و $B\left(3,-4\right)$.

f) يمر بالنقطة $A\left(8,-2\right)$ ويقطع المحور Y في النقطة $\left(0,-3\right)$.

g) يمر بالنقطة $A\left(10,-6\right)$ ويوازي المحور X .

h) يمر بالنقطة $A\left(10,-6\right)$ ويوازي المحور Y .

الفصل الخامس
المتتاليات ومجموعها

(5 – 1) المتتالية

(5 – 2) المتتالية الحسابية ومجموعها

(5 – 3) الوسط الحسابي

(5 – 4) المتتالية الهندسية ومجموعها

(5 – 5) الوسط الهندسي

تمارين

المتتاليات ومجموعها

(5 – 1) المتتالية:

نعرف أنه في كتابة أي مجموعة من العناصر فلايهم الترتيب الذي نكتب به عناصر المجموعة فمثلاً المجموعة $\{1,3,7,6,4\}$ هي نفسها المجموعة $\{6,3,4,7,1\}$ ولكن في بعض الحالات نحتاج إلى دراسة مجموعة من العناصر مرتبة بطريقة معينة, فإذا فرضنا أن درجة الحرارة العظمى في مدينة الرياض خلال الأيام العشرة الأولى من شهر رمضان كالاتي:

$$26\ ,\ 27\ ,\ 27\ ,\ 28\ ,\ 30\ ,\ 31\ ,\ 29\ ,\ 29\ ,\ 27\ ,\ 28\ .$$

هذه الأعداد مأخوذة بنفس الترتيب وتسمى بالمتتالية وكل عدد من هذه المتتالية يسمى بحد المتتالية، ففي المتتالية السابقة نقول أن الحد الأول للمتتالية هو العدد 26 و حدها الثاني هو 27 و وحدها العاشر هو 28. وقد تكون المتتالية منتهية أي عدد حدودها محدود كما في المتتالية السابقة أوقد تكون غير منتهية مثل متتالية الأعداد الطبيعية الفردية والتي تكون على الصورة:

$$1\ ,\ 3\ ,\ 5\ ,\ 7\ ,\ 9\ ,\ 11\ ,\ \dots\ .$$

وهذه المتتالية تعطى بالعلاقة $2n-1$ لكل $n \in \mathbb{N}$، وإذا رمزنا للعلاقة $(2n-1)$ بالرمز a_n والذي يسمى بالحد العالم والتي يدل على بقية الحدود، فنجد أن $a_1 = 1$ وهو الحد الأول والحد الثاني $a_2 = 3$ والحد الثالث $a_3 = 5$ وهكذا. وبالمثل فأن متتالية مضاعفات العدد 5 يمكن كتابتها على الصورة:

$$5\ ,\ 10\ ,\ 15\ ,\ 20\ ,\ 25\ ,\ \dots\ .$$

وحدها العام هو $a_n = 5n$ ، $n \in \mathbb{N}$. ومن ذلك نستنتج أن المتتالية المنتهية و الغير منتهية هي ترتيب معين من الأعداد حيث تكتب المتتالية المنتهية لعدد n من الحدود على الصورة $a_1\ ,\ a_2\ ,\ a_3\ ,\ \dots\ ,\ a_n$ أو على الصورة $\{a_k\}_{k=1}^{n}$. وتكتب المتتالية

الغير منتهية على الصورة ... , a_1 , a_2 , a_3 أو على الصورة $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$. ويمكن تحديد لبعض المتتاليات حدها العام a_n بعبارة جبرية، وأحياناً لايمكن تحديد حد عام لبعض المتتاليات مثل متتالية الأعداد الأولية والتي تكتب على الصورة $2 , 3 , 5 , 7 , 11 , \ldots$.

مثال (1):

اكتب الحدود الخمسة الأولى من المتتالية التالية:

1. $a_n = 3n + 2$.
2. $a_n = (-1)^n + 2n$.
3. $a_1 = 2 , a_n = a_{n-1} - n$.

الحل:

1. لايجاد الحد الأول للمتتالية $a_n = 3n + 2$ نعوض بدل n بالعدد 1 :

$$n = 1 \qquad a_1 = 3(1) + 2 = 3 + 2 = 5 .$$

ويمكن ايجاد الحدود الأربعة الأخرى بنفس الطريقة :

$$n = 2 \qquad a_2 = 3(2) + 2 = 6 + 2 = 8 .$$

$$n = 3 \qquad a_3 = 3(3) + 2 = 9 + 2 = 11 .$$

$$n = 4 \qquad a_4 = 3(4) + 2 = 12 + 2 = 14 .$$

$$n = 5 \qquad a_5 = 3(5) + 2 = 15 + 2 = 17 .$$

وبذلك فإن الحدود الخمسة الأولى من المتتالية هي $17 , 14 , 11 , 8 , 5$.

2. في المتتالية $a_n = (-1)^n + 2n$:

$$n = 1 \qquad a_1 = (-1)^1 + 2(1) = -1 + 2 = 1 .$$

$n=2 \qquad a_2=(-1)^2+2(2)=1+4=5$.

$n=3 \qquad a_3=(-1)^3+2(3)=-1+6=5$.

$n=4 \qquad a_4=(-1)^4+2(4)=1+8=9$.

$n=5 \qquad a_5=(-1)^5+2(5)=-1+10=9$.

حدود المتتالية الخمسة الأولى هي 9 , 9 , 5 , 5 , 1 .

3. في المتتالية $a_1=2\ ,\ a_n=a_{n-1}-n$:

$n=1 \qquad a_1=2$ معطى .

$n=2 \qquad a_2=a_{2-1}-2=a_1-2=2-2=0$.

$n=3 \qquad a_3=a_{3-1}-3=a_2-3=0-3=-3$.

$n=4 \qquad a_4=a_{4-1}-4=a_3-4=-3-4=-7$

$n=5 \qquad a_5=a_{5-1}-5=a_4-5=-7-5=-12$.

حدود المتتالية الخمسة الأولى هي: 12− , 7− , 3− , 0 , 2 .

<u>مجموع المتتالية:</u>

إذا كانت $a_1,a_2,a_3,...,a_n$ تمثل متتالية, فإن مجموعها S هو:

$$S=a_1+a_2+a_3+...+a_n$$

ونسمي S في هذه الحالة متسلسلة منتهية عدد حدودها n .

ويمكن للاختصار كتابة المجموع السابق على النحو التالي:

$$S=\sum_{k=1}^{n}a_k \ .$$

الرمز $\sum$ يرمز إلى حاصل جمع مجموعة من العناصر ويقرأ (سيجما).

مثال (2):

أوجد المجموع $S=\sum_{k=1}^{4}(k^2-k)$.

الحل:

أولاً نوجد قيمة الحدود الأربعة الأولى ومن ثم ايجاد حاصل الجمع:

$$\begin{aligned} S=\sum_{k=1}^{4}(k^2-k)&=(1^2-1)+(2^2-2)+(3^2-3)+(4^2-4)\\ &=(1-1)+(4-2)+(9-3)+(16-4)\\ &=0+2+6+12=20\ . \end{aligned}$$

إذاً المجموع هو $S=\sum_{k=1}^{4}(k^2-k)=20$.

(5 – 2) المتتالية الحسابية ومجموعها:

تأمل في المتتاليات التالية :

$$2,5,8,11,...$$
$$4,6,8,10,...$$

في المتتالية الأولى يمكن الحصول على كل حد (عدا الأول) بإضافة العدد 3 إلى الحد السابق له. هذه المتتالية مثال لمتتالية حسابية وتسمى هذه القيمة الثابتة بأساس المتتالية. وكذلك المتتالية الثانية يمكن الحصول على كل حد (عدا الأول) بإضافة العدد 2 إلى الحد السابق له.

تعريف المتتالية الحسابية:

نقول عن المتتالية $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$ أنها متتالية حسابية إذا كان الفرق بين كل حد والذي يسبقه عدداً ثابتاً أي أن $a_{k+1} - a_k = d$ لكل $k \in \mathbb{N}$ ويسمى العدد الثابت d بأساس المتتالية الحسابية.

مثال (3):

وضح أي المتتاليات التالية متتالية حسابية:

1. $-1, 2, 5, 8, 11, \ldots$.
2. $-2, 2, -2, 2, \ldots$.
3. $a_n = 2n + 1$.
4. $a_n = n^2 + 1$.

الحل:

1. إذا اردنا اثبات أن المتتالية حسابية أم لا نجد الفرق بين أي حد والحد السابق له:

$$\begin{array}{ccccccc} -1 & , & 2 & , & 5 & , & 8 & , & 11 & , \ldots \\ \updownarrow & & \updownarrow & & \updownarrow & & \updownarrow & & \updownarrow & \\ a_1 & & a_2 & & a_3 & & a_4 & & a_5 & \end{array}$$

$$a_2 - a_1 = 2 - (-1) = 3 .$$
$$a_3 - a_2 = 5 - 2 = 3 .$$

$$a_4 - a_3 = 8 - 5 = 3 .$$
$$a_5 - a_4 = 11 - 8 = 3 .$$

لاحظ أن الفرق دائما مقدار ثابت وهو العدد 3 ولذلك المتتالية $-1, 2, 5, 8, 11, ...$ هي متتالية حسابية.

2. نتبع نفس خطوات الفرع الأول من المثال السابق

$$\begin{matrix} -2 & , & 2 & , & -2 & , & 2 & , & ... \\ \updownarrow & & \updownarrow & & \updownarrow & & \updownarrow & & \\ a_1 & & a_2 & & a_3 & & a_4 & & \end{matrix}$$

$$a_2 - a_1 = 2 - (-2) = 4 .$$
$$a_3 - a_2 = -2 - 2 = -4 .$$
$$a_4 - a_3 = 2 - (-2) = 4 .$$

لاحظ ان الفرق ليس مقدارا ثابتا في كل مرة وبالتالي المتتالية ليست متتالية حسابية.

3. لاحظ أن $a_{k+1} = 2(k+1) + 1$ و $a_k = 2k + 1$ وأن:

$$a_{k+1} - a_k = 2(k+1) + 1 - (2k+1)$$
$$= 2k + 2 + 1 - 2k - 1 = 2 .$$

وبما أن الناتج 2 مقدار ثابت لا يعتمد على قيمة k فإن $a_n = 2n + 1$ متتالية حسابية.

4. $a_{k+1} = (k+1)^2 + 1$ و $a_k = k^2 + 1$.

أيضا:

$$a_{k+1} - a_k = (k+1)^2 + 1 - (k^2 + 1)$$
$$= k^2 + 2k + 1 + 1 - k^2 - 1 = 2k + 1 .$$

وبمـا أن النـاتج $2k+1$ لـيس مقـدارا ثابتـا ويعتمـد علـى k فـإن المتتاليـة $a_n = n^2 + 1$ ليست متتالية حسابية.

الحد العام للمتتالية الحسابية (الحد النوني):

الحد العام للمتتالية الحسابية:

الحد العام a_n للمتتالية الحسابية المعلوم فيها الحد الأول a_1 والأساس d يعطى بالعلاقة التالية :

$$a_n = a_1 + d\,(n-1)\ .$$

مثال (4):

لدينا متتالية حسابية حدها الأول 4 وأساسها 3 أوجد ما يلي:

1. الحد العام للمتتالية الحسابية.
2. الحدود الخمسة الاولى للمتتالية.
3. الحد العاشر للمتتالية.

الحل:

1. بما أن الحد الأول $a_1 = 4$ والأساس $d = 3$ وبتعويض قيمة a_1 و d في الحد العام فإن الحد العام للمتتالية هو:

$$a_n = 4 + 3(n-1)\ .$$

2. الحد الأول معطى من السؤال $a_1 = 4$. ولايجاد باقي الحدود نستخدم الحد العام للمتتالية كما يلي:

$$a_2 = 4+3(2-1) = 4+3(1) = 4+3 = 7\ .$$
$$a_3 = 4+3(3-1) = 4+3(2) = 4+6 = 10\ .$$
$$a_4 = 4+3(4-1) = 4+3(3) = 4+9 = 13\ .$$
$$a_5 = 4+3(5-1) = 4+3(4) = 4+12 = 16\ .$$

الحدود الخمسة الأولى للمتتالية الحسابية هي $4,7,10,13,16$.

3. الحد العاشر يمكن ايجاده باستخدام الحد العام:

$$a_n = 4+3(n-1)$$
$$a_{10} = 4+3(10-1) = 4+3(9) = 4+27 = 31\ .$$

ملاحظة:

يمكن تطبيق طريقة سهلة لحل الفرع الثاني من المثال السابق وهي أن نضع الحد الأول $a_1 = 4$ ثم نضيف له قيمة الأساس $d = 3$ لإيجاد الحد الثاني ولايجاد الحد الثالث نضيف قيمة الأساس $d = 3$ للحد الحد الثالث وهكذا:

$$a_1 \xrightarrow{+d} a_2 \xrightarrow{+d} a_3 \xrightarrow{+d} a_4 \xrightarrow{+d} a_5$$
$$4 \underset{+3}{\rightarrow} 7 \underset{+3}{\rightarrow} 10 \underset{+3}{\rightarrow} 13 \underset{+3}{\rightarrow} 16$$

مثال (5):

أوجد الحد العاشر من المتتالية الحسابية التي فيها الحد الثالث 5 وأساسها 3− .

الحل:

لايجاد الحد العاشر a_{10} يجب معرفة الحد الأول a_1 ولذلك نستخدم المعطيات وهي $d = -3$ (الأساس) و $a_3 = 5$ (الحد الثالث) لايجاد الحد الأول a_1 :

$$a_3 = a_1 + d\,(3-1) \Rightarrow\ 5 = a_1 + -3(2) = a_1 - 6 \quad \Rightarrow a_1 = 11\,.$$

لايجاد الحد العاشر a_{10} نستخدم $a_1 = 11$ و $d = -3$:

$$a_{10} = a_1 + d\,(10-1)\ = 11 + -3(9) = 11 + -27 = -16\,.$$

مجموع أول n حداً من متتالية حسابية:

إذا كانت $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$ متتالية حسابية حدها الأول هو a_1 وأساسها d فإن مجموع الـ n حداً الأولى S_n للمتتالية يتحدد باحد القانونين:

$$(1) \qquad \boxed{S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = \tfrac{n}{2}(a_1 + a_n)}\ .$$

$$(2) \qquad \boxed{S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = \tfrac{n}{2}\big(2a_1 + d\,(n-1)\big)}\ .$$

القانون الأول يستخدم إذا علم الحد الأول والحد الأخير وعدد حدود المتتالية, بينما يستخدم القانون الثاني إذا علم الحد الأول والأساس وعدد حدود المتتالية.

مثال (6):

أوجد مجموع أول عشرين حد من متتالية حسابية حدها الأول 12 وحدها العشرين -15 .

الحل:

الحد الأول $a_1 = 12$ والحد العشرين $a_{20} = -15$ وعدد الحدود المراد جمعها $n = 20$. وبما أن المعطيات الحد الأول والحد الأخير فإننا نستخدم القانون الأول لايجاد مجموع أول عشرين حد S_{20} :

$$S_{20} = \tfrac{20}{2}(12 + -15) = 10(-3) = -30\ ..$$

مثال (7):

أوجد مجموع أول عشرة حدود من متتالية حسابية حدها الأول 4 وأساسها 2 .

الحل:

بما أن المعطيات هي الحد الأول $a_1 = 4$ والأساس $d = 2$ وعدد الحدود المراد جمعها $n = 10$ فإننا سنستخدم القانون الثاني للإيجاد مجموع أول عشرة حدود S_{10} :

$$S_{10} = \frac{10}{2}\left(2a_1 + d\,(10-1)\right) = 5\left(2(4)+2(9)\right)$$
$$= 5(8+18) = 5(26) = 130\ .$$

مثال (8):

إذا كانت $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$ متتالية حسابية حدها الأول 2 وحدها السابع -16 **أوجد قيمة** مايلي:

1. $\sum_{k=1}^{7} a_k$.
2. $\sum_{k=1}^{12} a_k$.

الحل:

1. $\sum_{k=1}^{7} a_k = \frac{7}{2}(a_1 + a_7) = \frac{7}{2}(2+(-16)) = \frac{7}{2}(-14) = -49$.

2. $\sum_{k=1}^{12} a_k$

في هذا المثال لا يمكن تطبيق أي من القانونين مباشرة لأنه ينبغي أولا **معرفة أساس** المتتالية ومن ثم نطبق القانون الأول . سنستخدم الحد السابع المعطى **في معرفة** الأساس d .

$$a_7 = a_1 + d\,(7-1) \Rightarrow -16 = 2 + 6d \Rightarrow$$
$$-18 = 6d \Rightarrow \ d = -3 \ .$$

الآن نطبق القانون الأول:

$$\sum_{k=1}^{12} a_k = \frac{12}{5}\left(2a_1 + d\,(12-1)\right) = 6\left(2(2) + (-3)(9)\right)$$
$$= 6\left(4 + -33\right) = 6\left(-29\right) = -174 \ .$$

(5 – 3) الوسط الحسابي:

إذا كـان a و b أعداد حقيقيـة فـإن الوسـط الحسابي لهمـا هـو العـدد $\boxed{c = \dfrac{a+b}{2}}$.

لاحـظ فـي هـذه الحالـة تـشكل a,c,b متتاليـة حـسابية حـدها الأول a و أساسـها $d = \dfrac{b-a}{2}$.

وهذا المفهوم ممكن تعميمه كالتالي:

نسمي الأعداد $c_1,c_2,c_3,\ldots,c_n \in \mathbb{R}$ أوساطاً حسابية بين العددين a و b إذا كانت المتتالية:

$a,c_1,c_2,c_3,\ldots,c_n,b$ متتالية حسابية .

إن عملية إدخال n من الأوساط الحسابية بين العددين a و b هي عبارة عن تكوين متتالية حسابية حدها الأول a وحدها الأخير b وبالتالي سيكون عدد حدودها يساوي $n+2$.

مثال (9):

أوجد الوسط الحسابي للعددين 3 و 11 .

الحل:

الوسط الحسابي للعددين 3 و11 هو:

$$\frac{11+3}{2}=\frac{14}{2}=7\ .$$

مثال (10):

أدخل أربعة أوساط حسابية بين العددين 2 و 17 .

الحل:

نريد إيجاد أربعة أعداد بحيث أن:

$$a_1=2\ ,\ a_2\ ,\ a_3\ ,\ a_4\ ,\ a_5\ ,\ a_6=17$$

تمثل متتالية حسابية حدها الاول $a_1 = 2$ وحدها السادس $a_6 = 17$. نجد أولا أساس هذه المتتالية:

$$a_6=a_1+d\left(6-1\right)\Rightarrow 17=2+5d$$
$$\Rightarrow 5d=15\ \Rightarrow\ d=3\ .$$

الأوساط الحسابية الأربعة هي:

$$a_2=a_1+d=2+3=5\ .$$

$$a_3=a_2+d=5+3=8\ .$$

$$a_4=a_3+d=8+3=11\ .$$

$$a_5=a_4+d=11+3=14\ .$$

(5 – 4) المتتالية الهندسية ومجموعها:

تأمل في المتتاليات التالية:

$$1,2,4,8,16,...$$
$$3,9,27,81,...$$

في المتتالية الأولى يمكن الحصول على كل حد (عدا الأول) بضرب الحد السابق له في العدد 2. هذه المتتالية مثال لمتتالية هندسية وتسمى هذه القيمة الثابتة بأساس المتتالية. وكذلك المتتالية الثانية يمكن الحصول على كل حد (عدا الأول) بضرب الحد السابق له بالعدد 3 .

<u>تعريف المتتالية الهندسية:</u>

تكون المتتالية $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$ متتالية هندسية إذا كان حاصل قسمة أي حد على الحد الذي يسبقه مباشرة عددا ثابتا أي أن $\frac{a_{k+1}}{a_k} = r$ لكل $k \in \mathbb{N}$ و يسمى العدد الثابت r بأساس المتتالية الهندسية .

مثال (11):

وضح أي المتتاليات التالية متتالية هندسية:

1. $2,6,18,54,...$.
2. $-5,5,-5,5,...$.
3. $0,1,2,4,8,...$.
4. $1,2,4,12,24,...$.

الحل:

1. لمعرفة إن كانت هذه المتتالية هندسية أم لا نجري عملية القسمة على كل حد والحد الذي يسبقه:

$$\begin{matrix} 2 & , & 6 & , & 18 & , & 54 & , & \dots \\ \updownarrow & & \updownarrow & & \updownarrow & & \updownarrow \\ a_1 & & a_2 & & a_3 & & a_4 \end{matrix}$$

$$\frac{a_2}{a_1}=\frac{6}{2}=3 \quad ، \quad \frac{a_3}{a_2}=\frac{18}{6}=3 \quad ، \quad \frac{a_4}{a_3}=\frac{54}{18}=3 \ .$$

وبما أن حاصل عملية القسمة دائما مقدارا ثابتا وهو العدد 3 فإن هذه المتتالية متتالية هندسية أساسها 3 .

2. نتبع نفس خطوات الجزء الأول من المثال:

$$\begin{matrix} -5 & , & 5 & , & -5 & , & 5 & , & \dots \\ \updownarrow & & \updownarrow & & \updownarrow & & \updownarrow \\ a_1 & & a_2 & & a_3 & & a_4 \end{matrix}$$

$$\frac{a_2}{a_1}=\frac{5}{-5}=-1 \quad ، \quad \frac{a_3}{a_2}=\frac{-5}{5}=-1 \quad ، \quad \frac{a_4}{a_3}=\frac{5}{-5}=-1 \ .$$

حاصل عملية القسمة مقدارا ثابتا في كل مرة وبالتالي المتتالية هي متتالية هندسية وأساسها -1 .

.3

$$\begin{matrix} 0 & , & 1 & , & 2 & , & 4 & , & 8 & , & \dots \\ \updownarrow & & \updownarrow & & \updownarrow & & \updownarrow & & \updownarrow \\ a_1 & & a_2 & & a_3 & & a_4 & & a_5 \end{matrix}$$

$\frac{a_2}{a_1}=\frac{1}{0}$ غير معرف .

لاحظ أن حاصل قسمة الحد الثاني على الحد الأول مقداراً غير معرف (أي أنه ليس له وجود) فإن المتتالية ليست متتالية هندسية. لاحظ لو حذفنا الحد الأول لحصلنا على متتالية هندسية أساسها 2 .

ملحوظة: المتتالية الهندسية لا تحتوي على العدد صفر في أي حد من حدودها وكذلك لا يساوي أساسها الصفر .

.4

$$\begin{array}{ccccccc} 1, & 2, & 4, & 12, & 24, & \ldots \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & \end{array}$$

$$\frac{a_2}{a_1}=\frac{2}{1}=2 \quad ، \quad \frac{a_3}{a_2}=\frac{4}{2}=2 \quad ، \quad \frac{a_4}{a_3}=\frac{12}{4}=3 \ .$$

وبما أن ناتج عملية القسمة ليس مقدارا ثابتا في كل مرة فإن المتتالية ليست متتالية هندسية.

الحد العام للمتتالية الهندسية (الحد النوني):

الحد العام للمتتالية الهندسية:

الحد العام a_n للمتتالية الهندسية المعلوم فيها الحد الأول a_1 والأساس r يعطى بالعلاقة التالية:

$$a_n = a_1 r^{n-1} \ .$$

مثال (12):

لدينا متتالية هندسية حدها الأول 3 وأساسها 2 أوجد ما يلي:

1. الحد العام للمتتالية الهندسية.
2. الحدود الخمسة الأولى للمتتالية الهندسية.

الحل:

1. الحد الأول $a_1 = 3$ والأساس $d = 2$ وبتعويض قيمة a_1 و d في الحد العام فإن الحد العام للمتتالية الهندسية هو: $a_n = 3(2)^{n-1}$.
2. الحد الأول معطى من السؤال $a_1 = 3$. ولايجاد باقي الحدود نستخدم الحد العام للمتتالية كما يلي:

$$a_2 = 3(2)^{2-1} = 3(2)^1 = 6 .$$

$$a_3 = 3(2)^{3-1} = 3(2)^2 = 3(4) = 12 .$$

$$a_4 = 3(2)^{4-1} = 3(2)^3 = 3(8) = 24 .$$

$$a_5 = 3(2)^{5-1} = 3(2)^4 = 3(16) = 48 .$$

الحدود الأربعة الأولى للمتتالية الهندسية هي 48 , 24 , 12 , 6 , 3 .

ملاحظة:

يمكن تطبيق طريقة سهلة لحل الفرع الثاني من المثال السابق وهي أن نضع الحد الأول $a_1 = 3$ ثم نضربه بقيمة الأساس $d = 2$ لايجاد الحد الثاني ولايجاد الحد الثالث نضرب الحد الثاني بقيمة الأساس $d = 2$ وهكذا :

$$a_1 \xrightarrow{\times d} a_2 \xrightarrow{\times d} a_3 \xrightarrow{\times d} a_4$$

$$3 \underset{\times 2}{\rightarrow} 6 \underset{\times 2}{\rightarrow} 12 \underset{\times 2}{\rightarrow} 24$$

مثال (13):

أوجد الحد الخامس من المتتالية الهندسية التي فيها الحد الثالث 16 وأساسها $\frac{1}{2}$.

الحل:

لإيجاد الحد الخامس a_5 يجب معرفة الحد الأول a_1 ولذلك نستخدم المعطيات وهي $r=\frac{1}{2}$ (الأساس) و $a_3=16$ (الحد الثالث) لايجاد الحد الأول a_1 .

$$a_3 = a_1 r^{3-1}$$

$$16 = a_1\left(\frac{1}{2}\right)^2$$

$$16 = a_1\left(\frac{1}{4}\right) \Rightarrow a_1 = 64 .$$

لإيجاد الحد الخامس a_5 نستخدم $a_1=64$ و $r=\frac{1}{2}$:

$$a_5 = a_1 r^{5-1} = 64\left(\frac{1}{2}\right)^4 = 64\left(\frac{1}{16}\right) = 4 .$$

<u>**مجموع أول n حدا من متتالية هندسية:**</u>

إذا كانت $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$ متتالية هندسية حدها الأول هو a_1 وأساسها $r\neq 1$ فإن مجموع الـ n حداً الأولى S_n يتحدد بالقانون:

$$\boxed{S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = a_1\frac{r^n-1}{r-1}}$$

مثال (14):

أوجد مجموع الستة حدود الأولى من المتتالية الهندسية ...,32,16,8 .

الحل:

الحد الأول $a_1 = 32$ ويمكن إيجاد أساس المتتالية بقسمة أي حد على الحد الذي يسبقه مباشرة كما يلي:

$$r = \frac{16}{32} = \frac{8}{16} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2} .$$

و لايجاد مجموع الستة حدود الأولى S_6 من المتتالية نستخدم القانون التالي:

$$S_6 = a_1 \frac{r^6 - 1}{r - 1} = 32 \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^6 - 1}{\frac{1}{2} - 1} = 32 \frac{\frac{1}{64} - 1}{-\frac{1}{2}}$$
$$= 32 \frac{-\frac{63}{64}}{-\frac{1}{2}} = 32 \frac{126}{64} = 63 .$$

مثال (15):

أوجد قيمة $\sum_{k=1}^{5} a_k$ حيث أن a_n متتالية هندسية حدها الثالث 18 وأساسها 3 .

الحل:

لإيجاد مجموع الحدود الخمسة الأولى نجد الحد الأول أولاً و سنستخدم الحد الثالث $a_3 = 2$ لذلك:

$$a_3 = a_1 r^{3-1}$$
$$18 = a_1 (3)^2 = a_1 9$$
$$a_1 = 2 .$$

مجموع الحدود الخمسة الأولى للمتتالية الهندسية هو:

$$\sum_{k=1}^{5} a_k = a_1 \frac{r^5 - 1}{r - 1} = 2\left(\frac{3^5 - 1}{3 - 1}\right) = 2\left(\frac{243 - 1}{2}\right) = 2(121) = 242 .$$

(5 – 5) الوسط الهندسي:

إذا كان a و b عددين حقيقية موجبين فإن الوسط الهندسي لهما هو العدد $c=\sqrt{ab}$. لاحظ في هذه الحالة تشكل a,c,b متتالية هندسية حدها الأول a و أساسها $d=\sqrt{\frac{b}{a}}$ كما أن $c^2=ab$.

وهذا المفهوم ممكن تعميمه كالتالي: نسمي الأعداد $c_1,c_2,c_3,\ldots,c_n\in\mathbb{R}$ أوساطاً هندسية بين العددين الموجبين a و b إذا شكلت المتتالية:

$a,c_1,c_2,c_3,\ldots,c_n,b$ متتالية هندسية .

إن عملية إدخال n من الأوساط الهندسية بين العددين a و b هي عبارة عن تكوين متتالية هندسية حدها الأول a وحدها الأخير b وبالتالي سيكون عدد حدودها يساوي $n+2$.

مثال (16):

أوجد الوسط الهندسي للعددين 3 و 12 .

الحل:

الوسط الهندسي للعددين 3 و 12 هو:

$$\sqrt{3\times12}=\sqrt{36}=6\ .$$

مثال (17):

أدخل أربعة أوساط هندسية بين العددين 1 و32 .

الحل:

نريد إيجاد أربعة أعداد بحيث أن:

$$a_1=1\ ,\ a_2\ ,\ a_3\ ,\ a_4\ ,\ a_5\ ,\ 32=a_6$$

تمثل متتالية هندسية حدها الأول $a_1 = 1$ وحدهل الثاني $a_6 = 32$. نوجد أولاً أساس هذه المتتالية:

$$a_6 = a_1 r^{6-1}$$
$$32 = (1) r^5$$
$$(2)^5 = r^5$$
$$r = 2 .$$

الأوساط الحسابية الأربعة هي:

$$a_2 = a_1 r = 1 \times 2 = 2 .$$

$$a_3 = a_2 r = 2 \times 2 = 4 .$$

$$a_4 = a_3 r = 4 \times 2 = 8 .$$

$$a_5 = a_4 r = 8 \times 2 = 16 .$$

تمارين

1. اكتب الحدود الحدود الخمسة لكل من المتتاليات التالية:

a) $a_n = n^2 - 2n$.

b) $a_n = 2(-1)^n + 5n$.

c) $a_1 = 3$, $a_n = 2a_{n-1} - 3$.

d) $a_1 = -1$, $a_n = 2n - a_{n-1}$.

2. احسب كل مما يلي:

a) $\sum_{k=1}^{6}(3k-2)$.

b) $\sum_{k=1}^{4}(-2k^2+3k)$.

c) $\sum_{k=1}^{5}(5-2k)^2$.

d) $\sum_{k=2}^{5}(-1)^k(k^2+6)$.

3. أي من المتتاليات التالية حسابية:

a) $2, -4, 6, -8, \ldots$.

b) $3, 3, 3, 3, 3, \ldots$.

c) $1, 2, 1, 2, 1, \ldots$.

d) $10, 7, 4, 1, -2, \ldots$.

e) $a_n = 2n - 5$.　　　f) $a_n = n^2 + 2n$.

4. أكتب حدود المتتاليات الحسابية في كل مما يلي:

a) $a_1 = 3$, $d = 2$, $n = 5$.　　　b) $a_1 = 10$, $d = -3$, $n = 6$.

c) $a_3 = 5$, $d = -2$, $n = 5$.

5. أوجد الحد السادس a_6 في كل من المتتاليات الحسابية التالية:

a) $a_1 = 4$, $d = 3$.　　　b) $a_1 = 20$, $d = -4$.

c) $a_3 = 6$, $d = 2$.　　　d) $13, 10, 7, \ldots$.

6. أوجد مجموع الحدود العشرة الأولى لكل من المتتاليات الحسابية التالية:

a) $a_1 = 10$, $d = -2$.　　　b) $a_1 = 4$, $a_5 = 12$.

c) $a_1 = 30$, $a_{10} = -15$.　　　d) $-15, -12, -9, -6, \ldots$.

7. أوجد الوسط الحسابي لكل عددين في كل مما يلي:

a) $4 , 10$.
b) $-7 , 0$.
c) $-11 , -3$.
d) $-12 , 12$.
e) $-21 , 15$.
f) $2.5 , 7.5$.

8. أدخل خمسة أوساط حسابية بين العددين التاليين:

a) $2 , 14$.
b) $0 , 30$.
c) $-3 , -15$.
d) $20 , -4$.
e) $3 , 6$.
f) $2.5 , 4$.

9. أي من المتتاليات التالية هندسية:

a) $-1,3,-9,27,\ldots$.
b) $2,2,2,2,2,\ldots$.
c) $2,4,2,4,2,\ldots$.
d) $9,3,1,\frac{1}{3},\ldots$.
e) $-16,-8,-4,-2,\ldots$.
f) $25,5,0,\frac{1}{5},\ldots$.

10. اكتب حدود المتتاليات الهندسية التالية:

a) $a_1 = -2\ ,\ r = 2\ ,\ n = 5\ .$

b) $a_1 = 32\ ,\ r = \frac{1}{2}\ ,\ n = 6\ .$

c) $a_3 = 1\ ,\ r = \frac{1}{3}\ ,\ n = 6\ .$

d) $a_1 = 1\ ,\ a_4 = -8\ ,\ n = 6\ .$

11. أوجد الحد الخامس a_5 في كل من المتتاليات الهندسة التالية:

a) $a_1 = 3\ ,\ r = 2\ .$

b) $a_1 = \frac{-1}{4}\ ,\ r = -2\ .$

c) $a_2 = 9\ ,\ r = \frac{1}{3}\ .$

d) $a_1 = 2\ ,\ a_2 = 20\ .$

e) $4, -2, 1, \ldots\ .$

12. أوجد مجموع الحدود الخمسة الأولى من كل من المتتاليات الهندسية التالية:

a) $a_1 = 48\ ,\ r = \frac{1}{2}\ .$

b) $a_1 = 4\ ,\ a_2 = 4\ .$

c) $a_3 = 2\ ,\ r = \frac{1}{2}\ .$

d) $1, -4, 16, \ldots\ .$

13.أوجد الوسط الهندسي لكل عددين فيما يلي:

a) $-1\ ,\ -9$.
b) $5\ ,\ 20$.

c) $2\ ,\ 200$.
d) $1.5\ ,\ 6$.

e) $-3\ ,\ -48$.
f) $2\ ,\ 32$.

14.أدخل أربعة أوساط هندسية بين كل عددين فيما يلي:

a) $2\ ,\ 64$.
b) $-1\ ,\ 32$.

c) $16\ ,\ \frac{1}{2}$.

15.أدخل ثلاثة أوساط هندسية كل عددين فيما يلي:

a) $2\ ,\ 162$.
b) $-81\ ,\ -1$.

c) $4\ ,\ 40000$.
d) $-3\ ,\ -3$.

الفصل السادس
الدوال

(6 – 1) مفهوم الدالة

(6 – 2) الدوال المعرفة على فترات حقيقية

تمارين

الدوال

(6 – 1) مفهوم الدالة:

إن مفهوم الدالة من أهم المفاهيم في الرياضيات زهز العامل الأساسي في التطبيقات المذهلة للرياضيات في سائر العلوم وعلى وجه الخصوص في علمي الإقتصاد والإدارة.

تعريف الدالة:

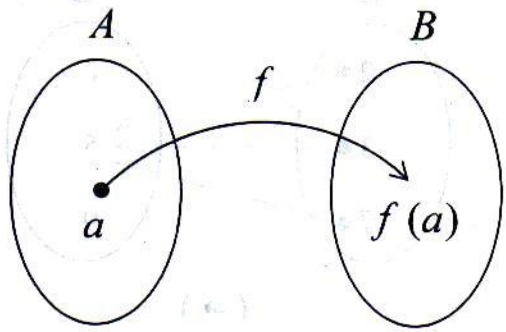
الدالة من مجموعة A إلى المجموعة B وتكتب $f : A \to B$ هي علاقة تربط كل عنصر $a \in A$ بعنصر وحيد $b \in B$ يسمى صورة a ويرمز له بالرمز $f\,(a)$. كما نسمي المجموعة A مجال تعريف الدالة f والمجموعة B المجال المقابل لها.

طبعاً يمكن استخدام رموز أخرى للدالة بدلاً من f مثل g , h وغيرها. لاحظ من التعريف أن الدالة f يجب أن تحقق شرطين وهما:

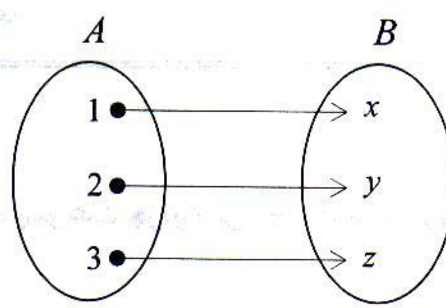
شرطا تعريف الدالة:

1. **لكل $a \in A$ يوجد صورة $f\,(a) \in B$.**
2. **الصورة $f\,(a)$ وحيدة بمعنى إذا كان كلاً من $b_1\ , \ b_2 \in B$ صورة لنفس العنصر $a \in A$ فلابد أن يتساويان.**

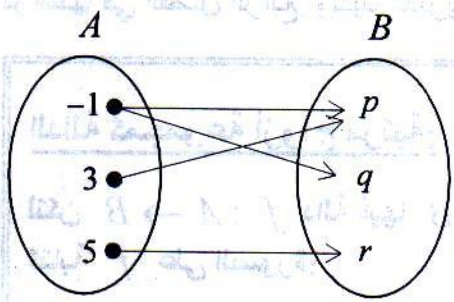
ويمكن للتوضيح تمثيل الدوال بأشكال ڤن على الصورة:



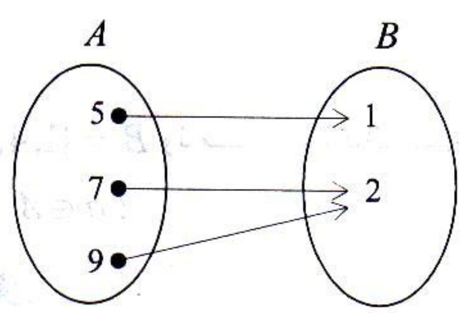
فمثلاً في الأشكال التالية كل من (أ) و (جـ) و (هـ) يمثل دالة أما الشكلان (ب) و (د) فلا يمثلان دالة (لماذا؟) .



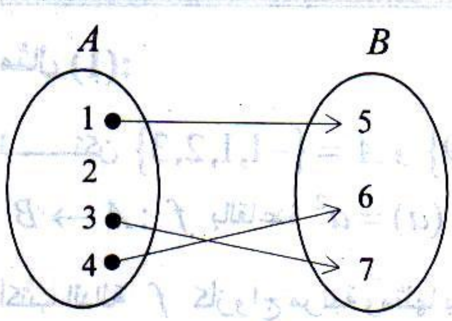
(أ)



(ب)



(جـ)

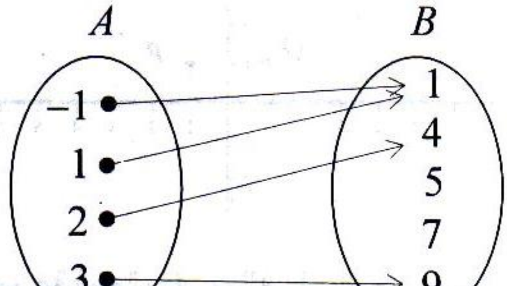


(د)

الحل:

$$f=\{\ (a,f\ (a))\ \big|\ a\in A\ \ \}$$
$$=\{\ (-1,1)\ ,\ (1,1)\ ,\ (2,4),\ (3,9)\ \}\ \ .$$

وتمثل بشكل ڤن الموضح:



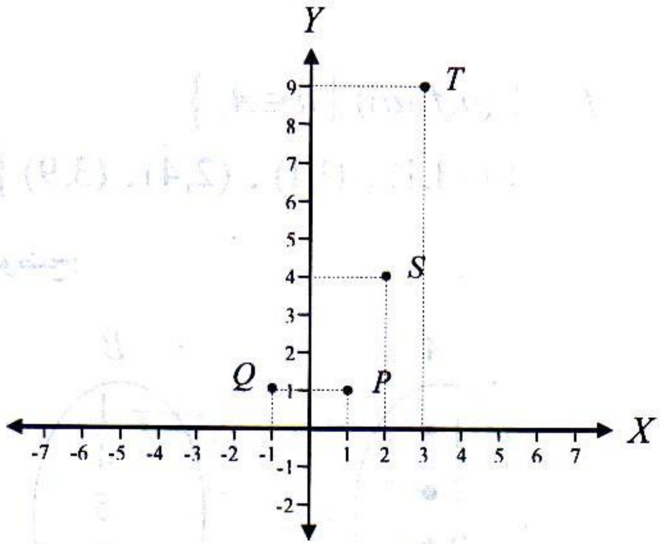
أيضاً في حالة الدوال المعرفة بين مجموعات جزئية من $\mathbb{R}$ يمكننا رسم الدوال بشكل أكثر فعالية من أشكال ڤن وذلك بتمثيلها كنقاط في المستوى الإحداثي XY .

مثال (2):

مثل الدالة في المثال (1) في المستوى الديكارتي.

الحل:

لدينا $f=\{\ (-1,1)\ ,\ (1,1)\ ,\ (2,4)\ ,\ (3,9)\ \}$ ويمكننا تمثيل هذه الأزواج في المستوى الديكارتي بالنقاط $P\ ,\ Q\ ,\ S\ ,\ T$ كما هو موضح.



لاحظ أن عناصر مجموعة المجال A ممثلة على المحور السيني X ، بينما عناصر مجموعة المجال المقابل B ممثلة على المحور الصادي Y .

(6 – 2) الدوال المعرفة على فترات حقيقية:

إن معظم الدوال التي نتعامل معها في التطبيقات تكون معرفة على فترة حقيقية (مفتوحة أو مغلقة أو غيرها) ومجالها المقابل أيضاً فترة حقيقية. وفي هذه الحالة فإن تمثيل الدالة في المستوى الديكارتي يكون على شكل منحنى متصل أو خط مستقيم أو متكسر والذي نسميه بشكل عام منحنى الدالة.

مثال (3):

لنعرف الدالة $f:[0,4) \to \mathbb{R}$ بالقاعدة: لكل $x \in [0,4)$ فإن $f(x) = 3x$:

1. أوجد الصورة $f(1)\ ,\ f(2)\ ,\ f(4)$.
2. مثل الدالة بالمستوى الديكارتي.

الحل:

1. $f(1)=3(1)=3$

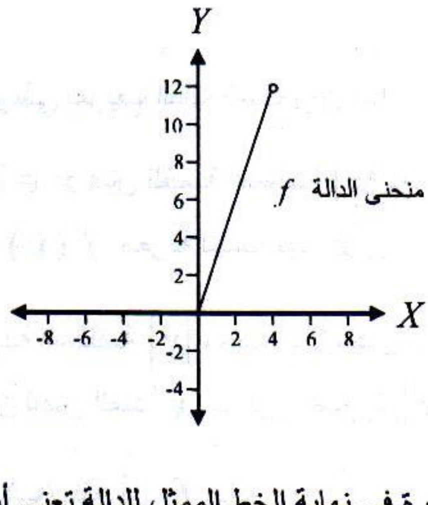
$f(2)=3(2)=6$

$. \ f(4)=3(4)=12$

2. لدينا $f(x)=3x$ لكل $x\in[0,4)$ وكمجموعة أزواج فإن:

$$f=\{\,(x,f(x))\mid x\in[0,4)\,\}$$

أي أن الصورة $f(x)$ تقابل الإحداثي الصادي Y لذا يمكن التعبير عن الصورة $f(x)$ بالصيغة $y=3x$ ونعرف من دراستنا السابقة أن هذه معادلة خط مستقيم ميله 3 ويمر بنقطة الأصل ولكن الدالة f ممثله فقط بالجزء من المستقيم الواقع بين $x=0$ و $x=4$ لأن مجالها $[0,4)$ كما هو موضح في الشكل:



إن الدائرة البيضاء الصغيرة في نهاية الخط الممثل للدالة تعني أن الدالة غير معرفة عند النقطة $x=4$ لأنها لاتدخل في مجال تعريفها.

الدالة الخطية:

هي أي دالة على الصورة $f(x) = ax + b$ حيث $a \neq 0$.

مثال (4):

لتكن $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ علاقة معرفة بالقاعدة:

$f(x) = |x|$ لجميع القيم $x \in \mathbb{R}$.

1. أثبت أن f في الواقع دالة.
2. أوجد الصور $f(0)$, $f(1)$, $f(-1)$.
3. ما هي العلاقة بين $f(x)$ و $f(-x)$.
4. أرسم منحنى هذه الدالة.

الحل:

1. سنثبت تحقق شرطي تعريف الدالة المذكورين أعلاه فنلاحظ:

أ) لأي $x \in \mathbb{R}$ فإن القيمة المطلقة $|x|$ دائماً معرفة لذلك الصورة $f(x) = |x|$ معرفة لجميع قيم x .

ب) إن القيمة المطلقة $|x|$ وحيدة ولايمكن أن يوجد قيمتان مطلقتان مختلفتان لنفس العدد x لذا فإن الصورة $f(x) = |x|$ وحيدة.

من تحقق (أ) و (ب) ينتج أن f دالة.

2. $f(-1)=|-1|=1$ ، $f(1)=|1|=1$ ، $f(0)=|0|=0$.

3. عند $x=0$ فإن $f(x)=|0|=0=f(-x)$

عند $x>0$ فإن $f(x)=|x|=x=|-x|=f(-x)$

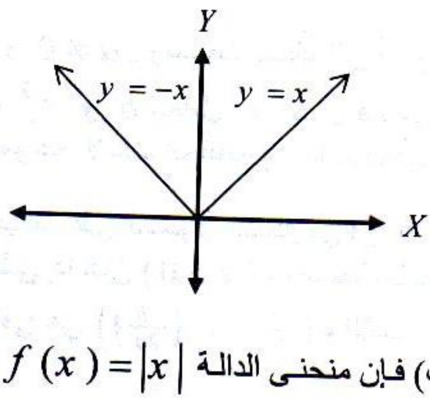
عند $x<0$ فإن $f(x)=|x|=-x=|-x|=f(-x)$

لذا في جميع الحالات الممكنة لقيم x فإن $f(x)=f(-x)$ وهي العلاقة المطلوبة.

4. لرسم منحنى الدالة $f(x)=|x|$ لدينا حالتان:

أ) عندما $x\geq 0$: في هذه الحالة $|x|=x$ أي أن $f(x)=x$ وبالتالي لدينا المعادلة $y=x$ وهي تمثل نصف الخط المستقيم المنصف للربع الأول والمنبعث من نقطة الأصل كما في الشكل أدناه.

ب) عندما $x<0$: في هذه الحالة $|x|=-x$ وبالتالي نحصل على $y=-x$ وهي تمثل نصف المستقيم المنصف للربع الثاني والمنبعث أيضاً من نقطة الأصل كما في الشكل:



من (أ) و (ب) فإن منحنى الدالة $f(x)=|x|$ هو إتحاد نصفي الخطين الموضحين في الشكل.

لاحظ التماثل بين فرعي منحنى الدالة حول محور الصادات Y بسبب أن $f(x)=f(-x)$ كما رأينا في الفقرة (3).

مثال (5):

لنعتبر العلاقة $g:[-1,1]\to\mathbb{R}$ حيث $g(x)=\sqrt{x}$. ناقش هل هذه العلاقة دالة أم لا؟

الحل:

من المعروف أن الجذر التربيعي $\sqrt{x}$ معرف فقط في حالة x عدد غير سالب لذلك على وجه الخصوص $\sqrt{-1}$ غير معرف أي أن الصورة $g(-1)$ غير موجودة وهذا يخل بالشرط (1) من شرطي تعريف الدالة لذلك فإن العلاقة g ليست دالة.

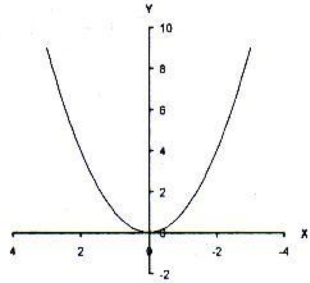
<u>الدالة التربيعية:</u>

تكون الدالة $y=f(x)$ دالة تربيعية أي دالة من الدرجة الثانية إذا كانت على الصيغة:

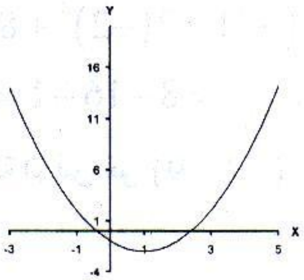
$$f(x)=ax^2+bx+c$$

حيث $a\ ,\ b\ ,\ c\in\mathbb{R}$ و $a\neq 0$, وسميت بذلك لأن أكبر أس للمتغير x هو العدد 2 . ويسمى a معامل x^2. و b معامل x أما c فيسمى بالحد المطلق ومجال الدالة التربيعية دائما هو مجموعة الأعداد الحقيقية إلا إذا تم تحديده مسبقاً.

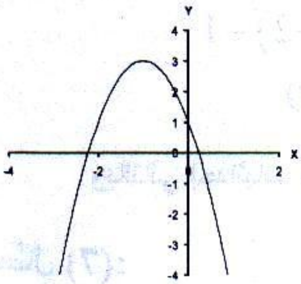
وعند تمثيل الدالة التربيعية بيانيا على المستوى الديكارتي فإن الشكل الناتج يسمى قطع مكافئ ويكون مفتوحاً للأعلى إذا كان $(a>0)$ ومفتوحاً للأسفل إذا كان $(a<0)$ وإحداثيات رأس القطع المكافئ هي $\left(\frac{-b}{2a}\ ,\ f\left(\frac{-b}{2a}\right)\right)$ والأشكال التالية تمثيل أنماطاً مختلفة من القطوع المكافئة.



$f(x) = x^2$



$f(x) = x^2 - 2x - 1$



$f(x) = -2x^2 - 4x + 1$

مثال (6):

للدالة $f(x) = 2x^2 + 8x - 1$ أوجد:

1. معامل x^2 و معامل x و الحد المطلق.
2. إحداثيات نقطة رأس القطع المكافئ.

الحل:

1. معامل x^2 يساوي 2 .
   معامل x يساوي 8 .
   الحد المطلق يساوي -1 .
2. إحـــداثيات الـــرأس هـــي $\left(\frac{-b}{2a}\ ,\ f\left(\frac{-b}{2a}\right)\right)$ حيـــث $a = 2$ و $b = 8$ و $c = -1$:

$$\frac{-b}{2a} = \frac{-8}{2(2)} = \frac{-8}{4} = -2$$

$$f\left(\frac{-b}{2a}\right)=f(-2)=2(-2)^2+8(-2)-1$$
$$=8-16-1=-9$$

وبالتالي إحداثيات نقطة الرأس هو $(-2,-9)$.

مثال (7):

مثل الدالة $f(x)=x^2+2x+2$ بيانيا على مستوى الديكارتي مع تحديد المجال والمجال المقابل

الحل:

أولا نجد إحداثيات نقطة رأس القطع المكافئ حيث $a=1$ و $b=2$ و $c=2$:

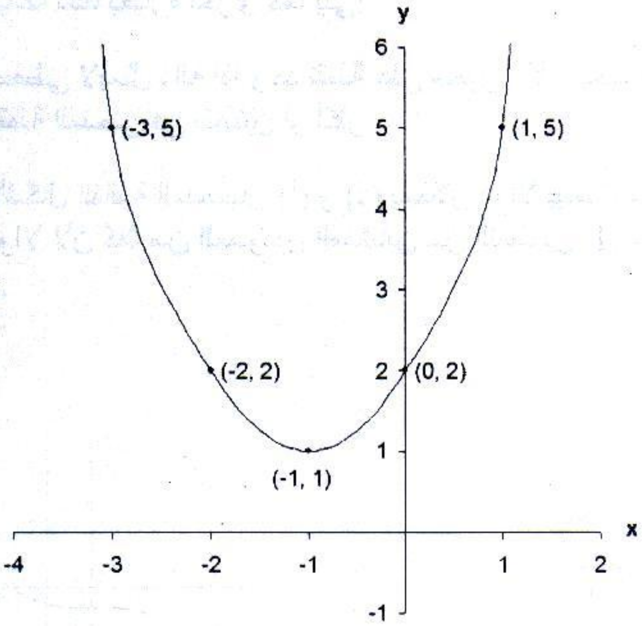
$$\frac{-b}{2a}=\frac{-2}{2(1)}=\frac{-2}{2}=-1$$

$$f\left(\frac{-b}{2a}\right)=f(-1)=(-1)^2+2(-1)+2$$
$$=1-2+2=1$$

وبالتالي إحداثيات نقطة رأس القطع المكافئ هي $(-1,1)$.

وسوف نختار قيم للمتغير x تكون أكبر من وأصغر من قيمة x في إحداثيات نقطة رأس القطع المكافئ. على سبيل المثال $x=0$ و $x=1$ و $x=-2$ و $x=-3$.

x	-3	-2	-1	0	1
$f(x)$	5	2	1	2	5



لاحظ أن القطع المكافي في هذه الدالـة مفتـوح لأعلـى وذلك لأن $a = 1$ (أي أكبر من صفر) .

مجال الدالة هي مجموعة الأعداد الحقيقية أما المجال المقابل فيساوي $[1,\infty)$ لأن أقل قيمة للدالة $f\ (x\ )$ هي 1 (انظر الرسم البياني) وأما أكبر قيمة غير محددة.

أحياناً يكون لدينا منحنى معطى في المستوى الديكارتي ونحتاج لمعرفة هل هذا المنحنى يمثل دالة أم لا؟ وفي الواقع لدينا معيار بسيط ودقيق للإجابة على ذلك وهو:

<u>معيار تمثيل منحنى الدالة:</u>

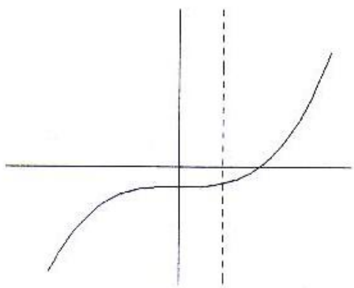
إذا أعطينا منحنى في المستوى الديكارتي فإنـه يلـزم ويكفي لتمثيل هذا المنحنى دالـة أن يحقق الشرط التالي:

إذا أنـشأنا عمـوداً مـن أي نقطـة علـى المحـور الـسيني X فإنـه يقطـع المنحنـى المعطى في نقطة واحدة على الأكثر.

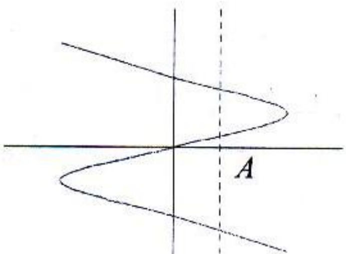
ويمكن صياغة ذلك بعبارة أخرى كما يلي:

المنحنى المعطى لايمثل دالة إذا وجد نقطة على محور X بحيث يقطع العمود المنشأ من هذه النقطة المنحنى في نقطتين أو أكثر.

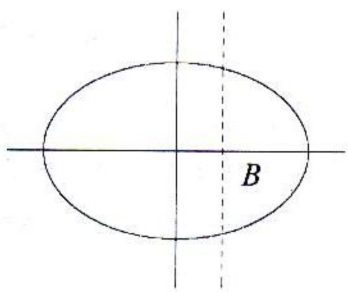
مثلاً في الأشكال التالية المنحنيان (أ) و (د) يمثلان دوالاً بينما المنحنيان (ب) و (جـ) لايمثلان دوالاً لأن كلاً من العمودين المنشأين من النقطتين A و B يقطع المنحنى في نقطتين.



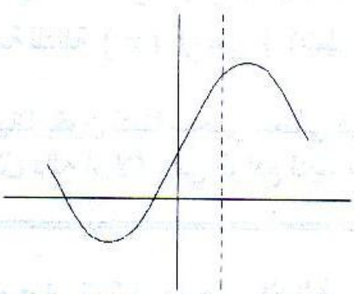
(أ)



(ب)



(جـ)

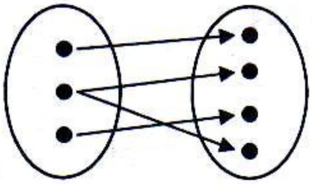


(د)

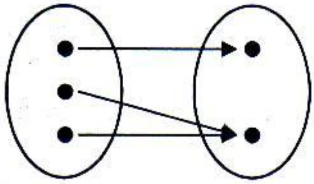
تمارين

1. أي من الأشكال التالية يمثل دالة:

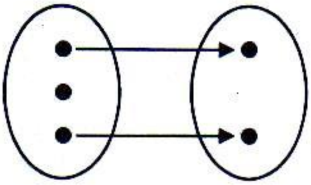
a)



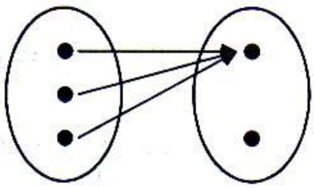
b)



c)



d)



2. في كل مما يلي دالة معبر عنها كمجموعة أزواج مرتبة أوجد مجال تعريف كل دالة ثم مثل الدالة في المستوى الديكارتي:

a) $f = \{ (1,-1) , (2,0) , (3,-1) , (4,2) \}$.

b) $g = \{ (0,1) , (-1,2) , (\frac{1}{2},1) , (2.5,-2) \}$.

c) $h = \{ (1,1) , (-1,1) , (2,2) , (-2,2) , (3,3) , (-3,3) \}$

3. في كل دالة مما يلي أوجد $f(x_1), f(x_2)$ عند النقطتين x_1, x_2 المعطاتين ثم ارسم منحنى الدالة:

a) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}\ ,\ f(x)=2x+1$

$x_1=1\ ,\ x_2=-1\ .$

b) $f:[0,\infty)\to\mathbb{R}\ ,\ f(x)=-x+3$

$x_1=1\ ,\ x_2=3\ .$

c) $f:\mathbb{R}^*\to\mathbb{R}\ ,\ f(x)=\dfrac{|x|}{x}$

$x_1=-1\ ,\ x_2=1\ .$

d) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}\ ,\ f(x)=x+|x|$

$x_1=-3\ ,\ x_2=5\ .$

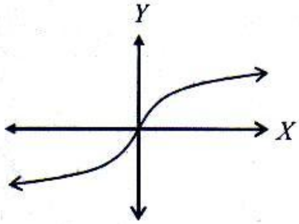
e) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}\ ,\ f(x)=2x^2+4$

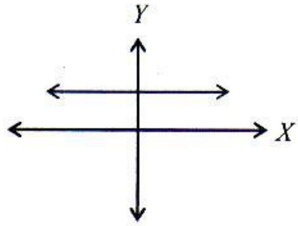
$x_1=-2\ ,\ x_2=\sqrt{3}\ .$

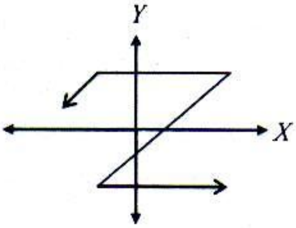
f) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}\ ,\ f(x)=x^2-2x+2$

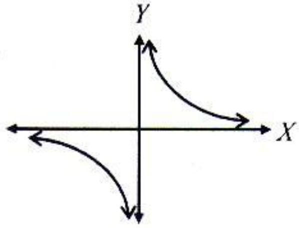
$x_1=0\ ,\ x_2=-1\ .$

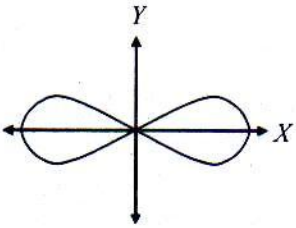
4. بين أي من المنحنيات التالية يمثل دالة:

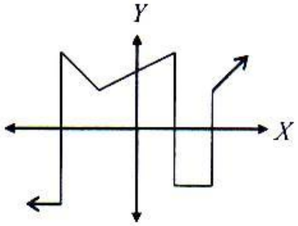
a) 

b) 

c) 

d) 

e) 

f) 

الفصل السابع
مدخل للتفاضل

(7 – 1) مفهوم النهاية

(7 – 2) اتصال الدالة

(7 – 3) مشتقة الدالة عند نقطة وتفسيرها الهندسي

(7 – 4) قوانين الإشتقاق

(7 – 5) الدوال غير القابلة للإشتقاق

(7 – 6) المشتقات من الرتب العليا

(7 – 7) القيم القصوى (العظمى والصغرى)

تمارين

مدخل لتفاضل الدوال

يعتبر التفاضل من أهم فروع الرياضيات وله تطبيقات عملية واسعة ومتنوعة في العلوم الطبيعية والاقتصادية الإدارية. وفي هذا الفصل سندرس مشتقة الدالة وكيفية إيجادها والمعنى الهندسي لها، ويمكن باستخدام حساب التفاضل الإجابة على الكثير من التساؤلات حول سلوك الدالة مثل معرفة أعلى وأدنى قيمة لها خلال فترة معينة. وسنقدم أولاً مفهوم نهاية واتصال دالة عند نقطة والتي هي الأساس في دراسة تفاضل الدوال.

(7 – 1) مفهوم النهاية:

سنقدم هنا مفهوم النهاية بصورة مبسطة يسهل على الطالب استيعابها. حيث تكمن أهمية نهاية دالة في أنها تصف وبصورة دقيقة سلوك الدالة $f(x)$ عندما تقترب x من قيمة معينة.

مثلا لنعتبر الدالة: $$f(x)=\frac{x^2-1}{x-1}$$

المعرفة على كل $\mathbb{R}$ باستثناء $\{1\}$ لأن مقام $f(x)$ غير معرفة عند $x=1$.
لنتتبع قيم الدالة $f(x)$ حول $x=1$ كما في الجدول التالي :

x	0.9	0.99	0.999	1	1.001	1.01	1.1
$f(x)$	1.9	1.99	1.999		2.001	2.01	2.1

نلاحظ من الجدول أنه عندما تقترب x من العدد 1 (ولكنها لا تأخذ القيمة 1) ، سواء من اليمين – أي تأخذ x قيم أكبر من الواحد - أو سواء من اليسار – أي تأخذ x قيم أصغر من الواحد - فإن قيمة $f(x)$ تقترب من 2 ونشير إلى هذه الحقيقة

بالقول (أن نهاية $f(x)$ عندما تقترب x من 1 هي 2) ويعبر عن هذا رمزياً على النحو التالي:

$$\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x-1} = 2 .$$

حيث أن الرمز $(x \to 1)$ يدل على أن x تقترب من 1 ولا تساويها.

وتكتب نهاية الدالة عندما يكون اقتراب x بقيم أكبر من 1 على النحو التالي:

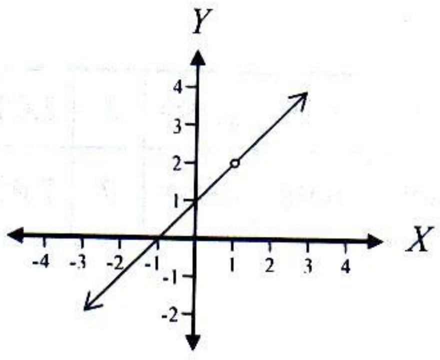
$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = 2 .$$

وتسمى نهاية الدالة من جهة اليمين، حيث يدل الرمز $(x \to 1^+)$ على اقتراب x من يمين العدد 1. في حين تكتب نهاية الدالة عندما يكون اقتراب x بقيم أصغر من 1 على النحو التالي:

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = 2 .$$

وتسمى نهاية الدالة من جهة اليسار، حيث يدل الرمز $(x \to 1^-)$ على اقتراب x من يسار العدد 1 .

ويوضح الشكل التالي أن الدالة غير معرفة عند النقطة $x = 1$ إلا أن قيمة الدالة تقترب من 2 عندما تقترب x من 1 من جهة اليمين أو من جهة اليسار .



نهاية الدالة عند نقطة:

إذا كانت الدالة $f(x)$ معرفة على جميع النقاط القريبة من النقطة $x = a$ ، وكانت قيمة الدالة $f(x)$ تقترب من عدد معين L عندما تقترب x من العدد a سواءً من جهة اليمين أو من جهة اليسار. عندئذٍ نقول إن نهاية الدالة عندما تقترب x من a هي L . ونعبر عن ذلك رمزياً على الصورة :

$$\lim_{x \to a} f(x) = L \; .$$

يوضح التعريف السابق أنه إذا كانت نهاية الدالة $f(x)$ من اليمين ومن اليسار متساوية وتساوي L عندما تقترب x من a فإن نهاية الدالة $f(x)$ عند النقطة a موجودة وتساوي L .

أما إذا كانت $\lim_{x \to a^-} f(x) \neq \lim_{x \to a^+} f(x)$ فإن $\lim_{x \to a} f(x)$ غير موجودة.

مثال (1):

أوجد قيمة $\lim_{x \to 2} 2x + 3$.

الحل:

نكون الجدول التالي:

x	1.9	1.99	1.999	2	2.001	2.01	2.1
$f(x)$	6.8	6.98	6.998	7	7.002	7.02	7.2

يبين لنا الجدول أن:

$$\lim_{x\to 2^+}(2x+3)=\lim_{x\to 2^-}(2x+3)=7 .$$

وبما أن النهاية للدالة $2x+3$ من اليمين تساوي النهاية من اليسار فإن:

$$\lim_{x\to 2}(2x+3)=7 .$$

<u>خصائص النهايات:</u>

إذا كانت $f(x)$ و $g(x)$ دالتين في x وكان $c,a\in\mathbb{R}$ فإن:

1. $\lim_{x\to a} c=c$ **. أي أن نهاية الدالة الثابتة هي القيمة الثابتة للدالة**
2. $\lim_{x\to a} x^n=a^n$.
3. $\lim_{x\to a} cf(x)=c\lim_{x\to a} f(x)$.
4. $\lim_{x\to a}[f(x)\pm g(x)]=\lim_{x\to a} f(x)\pm\lim_{x\to a} g(x)$.
5. $\lim_{x\to a}[f(x).g(x)]=\left[\lim_{x\to a} f(x)\right].\left[\lim_{x\to a} g(x)\right]$.
6. $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)}$, $\lim_{x\to a} g(x)\neq 0$.
7. $\lim_{x\to a}[f(x)]^n=\left[\lim_{x\to a} f(x)\right]^n$.

ومن هذه الخصائص يمكن إثبات أنه إذا كانت $f(x)$ دالة كثيرة الحدود وكان a عدد حقيقي فإن:

$$\lim_{x\to 2^+}(2x+3)=\lim_{x\to 2^-}(2x+3)=7\ .$$

وبما أن النهاية للدالة $2x+3$ من اليمين تساوي النهاية من اليسار فإن:

$$\lim_{x\to 2}(2x+3)=7\ .$$

خصائص النهايات:

إذا كانت $f(x)$ و $g(x)$ دالتين في x وكان $c,a\in\mathbb{R}$ فإن:

1. $\lim\limits_{x\to a} c=c$. أي أن نهاية الدالة الثابتة هي القيمة الثابتة للدالة
2. $\lim\limits_{x\to a} x^n=a^n$.
3. $\lim\limits_{x\to a} cf(x)=c\lim\limits_{x\to a} f(x)$.
4. $\lim\limits_{x\to a}[f(x)\pm g(x)]=\lim\limits_{x\to a} f(x)\pm\lim\limits_{x\to a} g(x)$.
5. $\lim\limits_{x\to a}[f(x).g(x)]=\left[\lim\limits_{x\to a} f(x)\right].\left[\lim\limits_{x\to a} g(x)\right]$.
6. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)}\quad,\quad \lim\limits_{x\to a} g(x)\neq 0$.
7. $\lim\limits_{x\to a}[f(x)]^n=\left[\lim\limits_{x\to a} f(x)\right]^n$.

ومن هذه الخصائص يمكن إثبات أنه إذا كانت $f(x)$ دالة كثيرة الحدود وكان a عدد حقيقي فإن:

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a) .$$

مثال (2):

إذا كانت:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - x & x \leq 3 \\ 2x - 3 & x > 3 \end{cases}$$

فأوجد ما يلي:

1. $\lim_{x \to 3^+} f(x)$.   2. $\lim_{x \to 3^-} f(x)$.   3. $\lim_{x \to 3} f(x)$.

الحل:

1. $\lim_{x \to 3^+} f(x) = \lim_{x \to 3^+} 2x - 3 = 2(3) - 3 = 3$.

2. $\lim_{x \to 3^-} f(x) = \lim_{x \to 3^-} x^2 - x = 3^2 - 3 = 6$.

3. $\lim_{x \to 3} f(x)$ النهاية غير موجودة

لأن $\lim_{x \to 3^+} f(x) \neq \lim_{x \to 3^-} f(x)$.

مثال (3):

أوجد قيمة مايلي:

1. $\lim_{x \to 2} 5$.   2. $\lim_{x \to 3} x^2$.

3. $\lim\limits_{x \to -2} -3x^3$.

4. $\lim\limits_{x \to -1} \left(2x^2 + 5x - 4\right)$.

5. $\lim\limits_{x \to 4} \dfrac{2x - 8}{x + 2}$.

6. $\lim\limits_{x \to 1} \left(\dfrac{x^2 + 1}{2 - x}\right)^5$.

الحل:

1. $\lim\limits_{x \to 2} 5 = 5$.

2. $\lim\limits_{x \to 3} x^2 = 3^2 = 9$.

3. $\lim\limits_{x \to -2} -3x^3 = -3(-2)^3 = -3(-8) = 24$.

4. $\lim\limits_{x \to -1} \left(2x^2 + 5x - 4\right) = 2(-1)^2 + 5(-1) - 4 = -7$.

5. $\lim\limits_{x \to 4} \dfrac{2x - 8}{x + 2} = \dfrac{\lim\limits_{x \to 4} 2x + 8}{\lim\limits_{x \to 4} x + 2} = \dfrac{2(4) - 8}{4 + 2} = \dfrac{0}{6} = 0$.

6. $\lim\limits_{x \to 1} \left(\dfrac{x^2 + 1}{2 - x}\right)^5 = \left(\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2 + 1}{2 - x}\right)^5 = \left(\dfrac{\lim\limits_{x \to 1} x^2 + 1}{\lim\limits_{x \to 1} 2 - x}\right)^5$

$$= \left(\frac{(1)^2 + 1}{2 - 1}\right)^5 = (2)^5 = 32 .$$

في حالة حساب النهايات للدوال النسبية فإننا في كثير من الأحيان عند أخذ نهاية البسط ونهاية المقام نحصل على الكمية غير المحددة $\frac{0}{0}$ ولتلافي ذلك ينبغي أولاً تحليل كل من البسط والمقام ومن ثم اختصار العوامل المشتركة وأخيراً نقسم نهاية البسط الجديد على نهاية المقام الجديد كما في المثال التالي:

مثال (4):

أوجد قيمة كلٍ مما يلي:

1. $\lim\limits_{x \to 3} \frac{x^2 - 3x}{x - 3}$.

2. $\lim\limits_{x \to 1} \frac{x^2 - 5x + 4}{x - 1}$.

3. $\lim\limits_{x \to -1} \frac{x + 1}{x^3 + 1}$.

4. $\lim\limits_{x \to 2} \frac{x^2 - 4}{3x - 6}$.

الحل:

1.

نلاحظ أولاً بأخذ النهاية مباشرة أن:

$$\lim_{x \to 3} \frac{x^2 - 3x}{x - 3} = \frac{\lim\limits_{x \to 3} x^2 - 3x}{\lim\limits_{x \to 3} x - 3} \longrightarrow \frac{0}{0} .$$

وهذه نهاية غير محددة ولإيجادها بالضبط نتبع ما يلي:

$$\lim_{x \to 3} \frac{x^2 - 3x}{x - 3} = \lim_{x \to 3} \frac{x\cancel{(x - 3)}}{\cancel{x - 3}} = \lim_{x \to 3} x = 3 .$$

$$2.\ \lim_{x\to 1}\frac{x^2-5x+4}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-4)(x-1)}{x-1}$$

$$=\lim_{x\to 1}x-4=1-4=-3\ .$$

$$3.\ \lim_{x\to -1}\frac{x+1}{x^3+1}=\lim_{x\to -1}\frac{x+1}{(x+1)(x^2+x+1)}$$

$$=\lim_{x\to -1}\frac{1}{(x^2+x+1)}=\frac{1}{(-1)^2+(-1)+1}=1\ .$$

$$4.\ \lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{3x-6}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x+2)}{3(x-2)}=\lim_{x\to 2}\frac{x+2}{3}=\frac{2+2}{3}=\frac{4}{3}$$

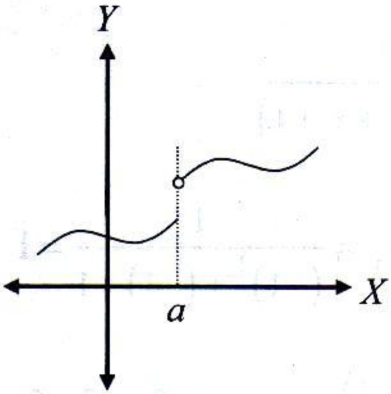
(7 – 2) اتصال الدالة:

إن موضوع اتصال الدوال هو أحد الموضوعات الهامة في دراسة التفاضل والتكامل حيث يعد المدخل الرئيسي لإيجاد مشتقات الدوال وتكاملاتها والتي سيتم شرحها لاحقاً. والان نقدم دراسة بسيطة لمفهوم اتصال الدالة.

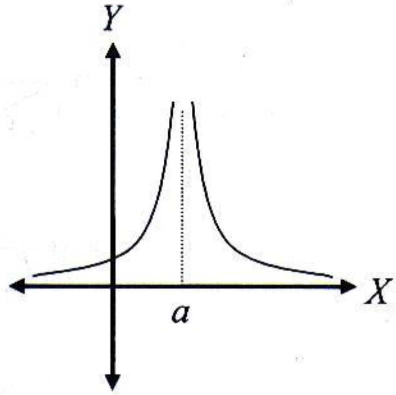
نقصد بقولنا أن الدالة $f(x)$ متصلة على الفترة $[a,b]$ أن منحنى الدالة $f(x)$ متصل دون انقطاع خلال الفترة $[a,b]$ التي يتغير فيها x ، أو بمعنى اخر إذا أمكننا أن نرسم منحنى الدالة في هذه الفترة دون أن نرفع سن القلم عن الورقة التي نرسم عليها، أي يكون منحنى الدالة في هذه الحالة خالياً من الإنقطاعات أو القفزات. وهذا يعني أن $f(x_0)$ معرفه عند كل نقطة x_0 في الفترة $[a,b]$ وأن

$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$. أما النقط التي يحدث عندها انقطاع في المنحنى الممثل للدالة فتسمى نقط عدم الاتصال (أي أن الدالة غير متصلة عندها).

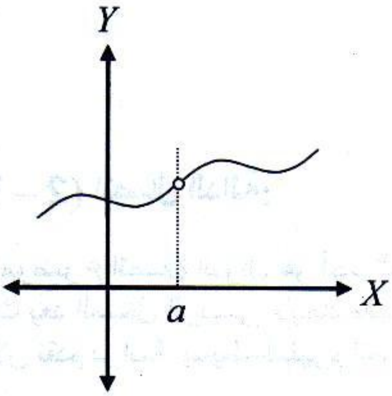
والان سنستعرض منحنيات بعض الدوال بهدف تبيان الاتصال وعدم الاتصال.



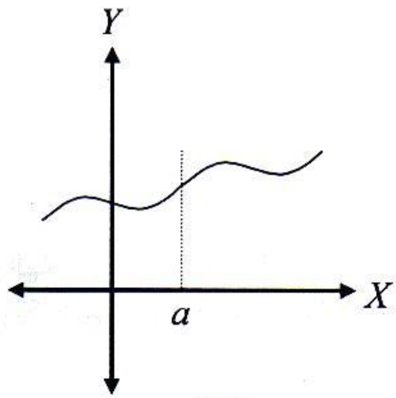
الشكل A



الشكل B



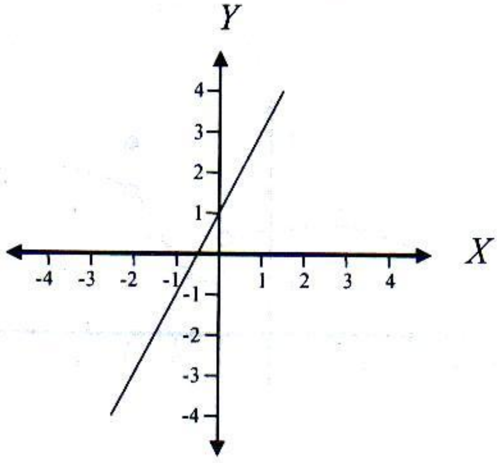
الشكل C



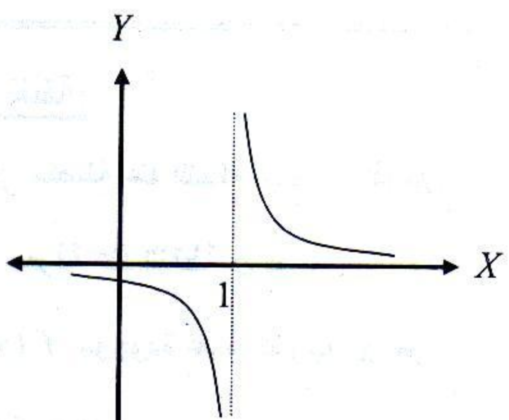
الشكل D

نلاحظ من الشكل A و B و C وجود انقطاع بمنحنى الدالة عند النقطة $x = a$ ولهذا فإننا نقول أن الدالة $f(x)$ هي دالة غير متصلة عند تلك النقطة. أما في الشكل D فإننا نلاحظ أن منحنى الدالة لايوجد به انقطاع عند النقطة $x = a$ ولهذا نقول أن الدالة $f(x)$ متصلة عند النقطة $x = a$.

إذا رسمنا الدالة $f(x) = 2x + 1$ فنجد أن منحنى الدالة $f(x)$ متصل عند أي قيمة $x \in \mathbb{R}$. ولهذا نقول أن الدالة $f(x)$ متصله على $\mathbb{R}$. انظر الشكل التالي:

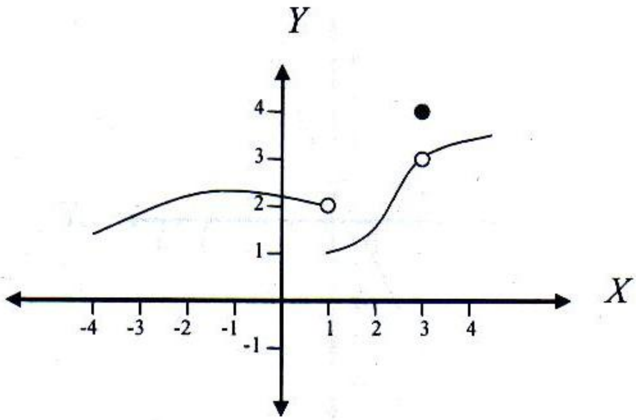


بينما إذا رسمنا الدالة $f(x) = \frac{2}{x-1}$ فنجد أن منحنى الدالة $f(x)$ غير متصل عند $x = 1$ لأن الدالة غير معرفة عند $x = 1$. ولكن الدالة متصلة عند أي قيمة أخرى لـ x غير العدد واحد، ولهذا نقول أن الدالة $f(x)$ متصله على $\mathbb{R} - \{1\}$ والشكل التالي يمثل منحنى هذه الدالة:



مثال (5):

أوجد نقاط عدم الاتصال للدالة الممثلة بالمنحنى التالي:



الحل: إذا نظرنا إلى المنحنى الممثل للدالة $f(x)$ سوف نجد به انقطاع عند النقطة $x=3$ $x=1$ ولهذا فإن الدالة تكون غير متصلة عند تلك النقط، أي أن نقاط عدم الاتصال للدالة $f(x)$ هي عند $x=1$ و $x=3$. لاحظ عند $x=3$ أن $f(3)$ معرف ولكن $\lim_{x\to 3} f(x) \neq f(3)$.

اتصال الدالة عند نقطة:

تكون الدالة $f(x)$ متصلة عند النقطة $x=a$ إذا كان:

1. **الدالة $f(x)$ معرفة عند النقطة $x=a$.**
2. **نهاية الدالة $f(x)$ موجودة عندما تقترب x من a .**
3. $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$.

ونتيجة لهذا التعريف فإن دوال كثيرات الحدود و دوال القيمة المطلقة تكون متصلة عند كل $x \in \mathbb{R}$ ولا تسبب لنا مشكلة في اتصالها. ولكن تظهر المشكلة في الدوال النسبية عند قيم x التي تجعل مقام الدالة النسبية مساوياً الصفر.

مثال (6):

ابحث اتصال الدوال التالية عند النقط المشار إليها:

1. $f(x) = 3x^2 + x - 6 \quad , \quad x = 2 .$

2. $f(x) = \dfrac{x+1}{x^2-1} \quad , \quad x = -1 .$

3. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-4}{x-2} & x \neq 2 \\ 2x & x = 2 \end{cases} \quad , \quad x = 2 .$

4. $f(x) = \begin{cases} 5x-1 & x < 1 \\ 2x - x^2 & x \geq 1 \end{cases} \quad , \quad x = 1 .$

5. $f(x) = \begin{cases} 4x+2 & x < 3 \\ 5x-3 & x = 3 \\ x^2+x+2 & x > 3 \end{cases} \quad , \quad x = 3 .$

الحل:

1. $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = \lim\limits_{x \to 2} 3x^2 + x - 6 = 3(2)^2 + (2) - 6 = 8 .$

$f(2)=3(2)^2+(2)-6=8$.

وبما أن $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=f(2)$ فإن الدالة $f(x)$ متصلة عند $x=2$.

2.

إن $f(-1)$ غير معرف حيث لو عوضنا $x=-1$ في الدالة لنتج لدينا الكمية غير المحددة $\frac{0}{0}$ ولذلك فإن إحدى شروط الإتصال غير متحقق وبالتالي $f(x)$ غير متصل عند $x=-1$ على الرغم أن النهاية موجودة وتساوي $\frac{-1}{2}$.

3. $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x-2}$.

$$=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x+2)}{x-2}=\lim_{x\to 2} x+2=4 .$$

$f(2)=2(2)=4$.

وبما أن $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=f(2)$ فإن $f(x)$ متصلة عند $x=2$.

4. $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+} 2x-x^2=2(1)-(1)^2=1$.

$\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-} 5x-1=5(1)-1=4$.

وبمـــا أن $\lim_{x\to1^-} f(x) \neq \lim_{x\to1^+} f(x)$ فـــإن نهايـــة الدالـــة $f(x)$ $\left(\lim_{x\to1} f(x)\right)$ غير موجودة، ولذلك فإن إحدى شروط الإتصال غير متحقق وبالتالي $f(x)$ غير متصل عند $x=1$.

5. $\lim_{x\to3^+} f(x) = \lim_{x\to3^+} x^2+x+2 = (3)^2+(3)+2 = 14$.

$\lim_{x\to3^-} f(x) = \lim_{x\to3^-} 4x+2 = 4(3)+2 = 14$.

إذاً قيمة $\lim_{x\to3} f(x) = 14$.

ولكن $f(3) = 5(3)-3 = 12$.

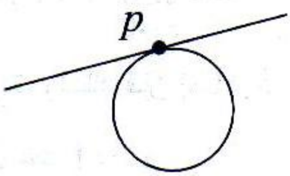
وحيث أن $\lim_{x\to3} f(x) \neq f(3)$ فإن $f(x)$ غير متصل عند $x=3$.

(7 – 3) مشتقة الدالة عند نقطة وتفسيرها الهندسي:

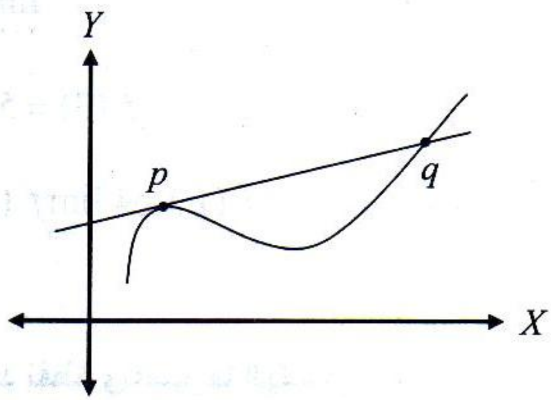
قبل أن نبدأ في تقديم مفهوم المشتقة نود أن نتعلم أولاً كيفية إيجاد خط التماس لمنحنى دالة ما لأن ذلك يساعدنا بدرجة كبيرة في فهم المعنى الهندسي للمشتقة.

<u>المماس لمنحنى عند نقطة:</u>

تعتمد كثير من مسائل علم التفاضل على إيجاد خط التماس لمنحنى ما عند نقطة محددة واقعة عليه. فيعرف خط التماس لدائرة عند نقطة ما p واقعة عليه بأنه الخط الذي يتقاطع مع منحنى الدائرة في نقطة واحدة فقط هي النقطة p نفسها ويسمى هذا الخط بمماس الدائرة عند p . انظر الشكل التالي:

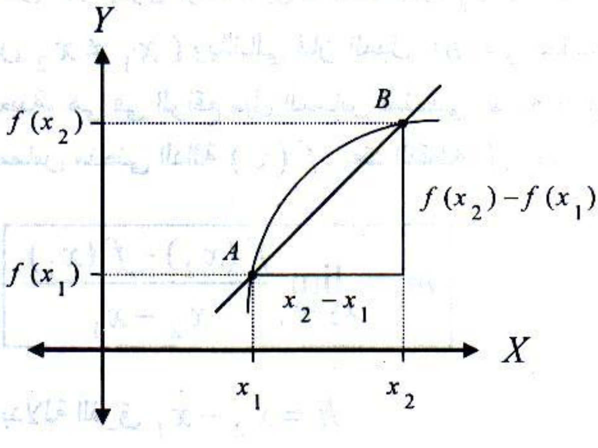


وهذا لا يصلح أن يكون تعريفاً عاماً لجميع المنحنيات، إذ أنه لو نظرنا للمنحنى المبين بالشكل التالي لوجدنا أن خط التماس للمنحنى عند النقطة p يتقاطع مع المنحنى عند نقطة أخرى هي نقطة q .



وسوف نحاول الوصول إلى تعريف مناسب لخط التماس لمنحنى عند نقطة واقعة عليه ولهذا فإننا سوف نبدأ بتعريف ميل خط التماس عند نقطة ما، وذلك لأنه إذا عرف ميل أي خط ونقطة عليه فإنه يتحدد تماماً ويمكن بسهولة إيجاد معادلته.

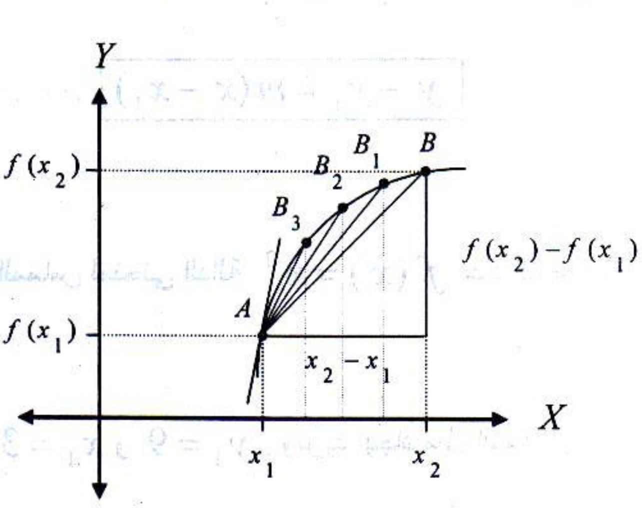
إذا كانت الدالة $f(x)$ متصلة عند النقطة $A\left(x_1, f(x_1)\right)$ وكان هناك نقطة أخرى $B\left(x_2, f(x_2)\right)$ على منحنى الدالة $f(x)$. انظر الشكل التالي:



فإننا نحصل على الميل m للخط AB حسب القاعدة التي درسناها سابقا:

$$m = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \quad \text{-------------} \ (1)$$

ونجعل النقطة B تتحرك على منحنى الدالة في اتجاه النقطة A ، فإننا نلاحظ أنه كلما اقتربت النقطة B من النقطة A (أي كلما اقتربت x_2 من x_1) متخذه الأوضاع $B_1, B_2, B_3 \ldots$ ، فإن الخط AB سيقترب من خط نهائي يسمى خط التماس (المماس) للمنحنى عند النقطة A . انظر الشكل التالي:



وعند اقتراب النقطة B من A بدون توقف فإن المسافة بين x_2 و x_1 تقترب من الصفر بدون توقف (ولكن $x_1 \neq x_2$) وبالتالي فإن الميل m في المتساوية (1) أعلاه يقترب من نهاية معينة، هي في الواقع ميل المماس لمنحنى الدالة $f(x)$ عند النقطة A . أي أن ميل مماس منحنى الدالة $f(x)$ عند النقطة A هو:

$$\boxed{m = \lim_{x_2 \to x_1} \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}}$$

سنعيد كتابة هذه الصيغة بدلالة الفرق $h = x_2 - x_1$.

فيكون $x_2 = x_1 + h$ ، وبالتالي $x_2 \to x_1$ تعني $(x_2 - x_1) \to 0$ أي أن $h \to 0$ ومنه :

$$\boxed{m = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_1 + h) - f(x_1)}{h}} \ .$$

وهذا هو تعريف المشتقة الاولى لدالة عند نقطة، فالمعنى الهندسي للمشتقة الأولى عند النقطة (x_1, y_1) يعبر عن ميل مماس المنحنى عند هذه النقطة وتكون معادلة المماس على الصورة :

$$\boxed{y - y_1 = m(x - x_1)} \ .$$

مثال (7):

أوجد ميل ومعادلة المماس لمنحنى الدالة $f(x) = x^2$ عند النقطة $(3,9)$.

الحل:

معطى من السؤال $x_1 = 3$ و $y_1 = 9$. ونريد إيجاد ميل المماس:

$$m = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_1+h)-f(x_1)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{f(3+h)-f(3)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{(3+h)^2-(3)^2}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{9+6h+h^2-9}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{6h+h^2}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h(6+h)}{h} = \lim_{h \to 0} (6+h) = 6 .$$

إذا ميل المماس $m = 6$ والنقطة $(3,9)$ وبالتالي فإن معادلة المماس هي:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - 9 = 6(x - 3)$$

$$y - 9 = 6x - 18$$

$$y = 6x - 9 .$$

المشتقة الأولى للدالة:

علمنا مما سبق أن إيجاد ميل المماس لمنحنى الدالة $f(x)$ عند النقطة x_1 تعطى بالعلاقة التالية:

$$m = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_1+h)-f(x_1)}{h} .$$

لكن إذا أردنا إيجاد ميل مماس لمنحنى الدالة $f(x)$ لأي نقطة اختيارية على المنحنى فإننا سنكتب x بدلاً من x_1 في الصيغة السابقة، وبالتالي ستصبح كالتالي:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

وهذه هي المشتقة الأولى – أو التفاضل – للدالة $f(x)$ بالنسبة للمتغير x .
ويستخدم الرمز $\frac{dy}{dx}$ أو $f'(x)$ أو y' للإشارة إلى المشتقة الأولى للدالة y بالنسبة للمتغير x .

تعريف دالة المشتقة الأولى:

دالة المشتقة الاولى $f'(x)$ للدالة $f(x)$ تعرف بأنها:

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}.$$

و تسمى المشتقة الأولى للدالة $f(x)$ بالنسبة للمتغير x ، ومجال الدالة $f'(x)$ هو كل قيم x التي تكون هذه النهاية موجودة عندها.

المعنى الهندسي للمشتقة الأولى للدالة $f(x)$ عند النقطة $(a, f'(a))$ يمثل ميل المماس لمنحنى الدالة $f(x)$ عند النقطة $x=a$.

مثال (8):

لدينا $f(x)=x^2+3$

1. أوجد دالة المشتقة الأولى $f'(x)$ باستخدام تعريف المشتقة .
2. أوجد ميل المماس لمنحنى الدالة $f(x)$ عند النقط $x=2$ و $x=-2$ و $x=0$.

الحل:

1. باستخدام التعريف أعلاه :

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\left[(x+h)^2+3\right]-\left[x^2+3\right]}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{x^2+2xh+h^2+3-x^2-3}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{2xh+h^2}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\cancel{h}(2x+h)}{\cancel{h}} = \lim_{h\to 0} (2x+h) = 2x \ .$$

2. بما أن $f'(x) = 2x$ فإن ميل المماس عند النقط $x = 2$ و $x = -2$ و $x = 0$ كما يلي :

$$m_{x=2} = f'(2) = 2(2) = 4 \ .$$

$$m_{x=-2} = f'(-2) = 2(-2) = -4 \ .$$

$$m_{x=0} = f'(0) = 2(0) = 0 \ .$$

مثال (9):

باعتبار الدالة $f(x) = x^2 - 3x$.

1. أوجد دالة المشتقة الأولى $f'(x)$ باستخدام تعريف المشتقة.

2. أوجد معادلة المماس لمنحنى الدالة $f(x)$ عند النقط $x_0 = 4$.

الحل:

1. باستخدام التعريف أعلاه :

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{\left[(x+h)^2-3(x+h)\right]-\left[x^2-3x\right]}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{x^2+2xh+h^2-3x-3h-x^2+3x}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{2xh+h^2-3h}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{h(2x+h-3)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}(2x+h-3) = 2x-3 .$$

2. لإيجاد معادلة المماس نجد ميل المماس وقيمة الدالة عند $x_0 = 4$:

بما أن $f'(x) = 2x-3$ فإن ميل المماس هو:

$$m = f'(4) = 2(4)-3 = 5 .$$

وقيمة الدالة عند $x_0 = 4$ هي:

$$f(4) = (4)^2 - 3(4) = 16-12 = 4 .$$

وبما أن الميل يساوي $m = 5$ والنقطة هي $(4,4)$ فإن معادلة المماس هي:

$$y - y_1 = m(x - x_1) \Rightarrow y - 4 = 5(x - 4)$$

$$\Rightarrow y - 4 = 5x - 20 \Rightarrow y = 5x - 16 .$$

وبذلك فإن معادلة المماس المطلوبة هي $y = 5x - 16$.

في أغلب الأحيان من الصعب إيجاد المشتقة الأولى باستخدام التعريف مباشرة لذا يوجد قوانين تسهل كثيرا عملية إيجاد المشتقة الأولى ونورد فيما يلي بعض هذه القوانين.

(7 – 4) قوانين الإشتقاق:

<u>اشتقاق الدالة الثابتة:</u>

إذا كانت $y = f(x) = k$ لجميع قيم x حيث k عدد حقيقي ثابت فإن المشتقة الأولى لهذه الدالة هي:

$$y' = \frac{dy}{dx} = f'(x) = 0 .$$

أي أن المشتقة الأولى للدالة الثابتة تساوي صفراً.

مثال (10):

1. $f(x) = 1.2 \Rightarrow f'(x) = 0 .$

2. $f(x) = -6 \Rightarrow f'(x) = 0 .$

3. $f(x) = 0 \Rightarrow f'(x) = 0 .$

اشتقاق دالة القوة:

إذا كانت $y = f(x) = x^{a}$ حيث a ثابت حقيقي و x تأخذ قيماً موجبة فإن المشتقة الأولى للدالة هي:

$$y' = \frac{dy}{dx} = f'(x) = a x^{a-1} \ .$$

أي أن المشتقة الأولى للمتغير x مرفوع لأس حقيقي هي الأس مضروباً في المتغير x بعد رفعه لأس ينقص واحد عن الأس الأصلي .

مثال (11):

أوجد المشتقة الأولى للدوال التالية:

1. $y = x$.
2. $y = x^{3}$.
3. $y = x^{-8}$.
4. $y = \frac{1}{x^{5}}$.
5. $y = \sqrt{x}$.
6. $y = \sqrt[3]{x^{4}}$.
7. $y = x^{\pi}$.

الحل:

1. $y = x \quad \Rightarrow \quad y' = 1(x)^{1-1} = x^{0} = 1$.

2. $y = x^3 \Rightarrow y' = 3(x)^{3-1} = 3x^2$.

3. $y = x^{-8} \Rightarrow y' = -8(x)^{-8-1} = -8x^{-9}$.

4. $y = \frac{1}{x^5} = x^{-5} \Rightarrow y' = -5x^{-5-1} = -5x^{-6} = \frac{-5}{x^6}$.

5. $y = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$

$$\Rightarrow y' = \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2x^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{2\sqrt{x}} .$$

6. $y = \sqrt[3]{x^4} = x^{\frac{4}{3}} \Rightarrow y' = \frac{4}{3}x^{\frac{4}{3}-1} = \frac{4}{3}x^{\frac{1}{3}} = \frac{4}{3}\sqrt[3]{x}$.

7. $y = x^{\pi} \Rightarrow y' = \pi x^{\pi-1}$.

<u>اشتقاق الدالة المضروبة بعدد ثابت:</u>

إذا كانت $y = kf(x)$ **حيث** k **ثابت حقيقي فإن:**

$$y' = \frac{dy}{dx} = kf'(x) .$$

ويعني ذلك أن المشتقة الأولى للدالة المضروبة بعدد ثابت تساوي العدد الثابت مضروبا في المشتقة الأولى للدالة.

مثال (12):

أوجد المشتقة الأولى للدوال التالية:

1. $y = 3x$.
2. $y = -2x^4$.

3. $y = 5x^{-2}$.
4. $y = \frac{-6}{x^3}$.

الحل:

1. $y = 3x \quad \Rightarrow \quad y' = 3(1)x^{1-1} = 3x^0 = 3$.

2. $y = -2x^4 \quad \Rightarrow \quad y' = -2(4)x^{4-1} = -8x^3$.

3. $y = 5x^{-2} \quad \Rightarrow \quad y' = 5(-2)x^{-2-1} = -10x^{-3}$.

4. $y = \frac{-6}{x^3} = -6x^{-3}$

$$\Rightarrow \quad y' = -6(-3)x^{-3-1} = 18x^{-4} = \frac{18}{x^4} .$$

<u>اشتقاق حاصل جمع أو طرح دالتين:</u>

إذا كانت $y = f(x) \pm g(x)$ **فإن:**

$$y' = \frac{dy}{dx} = f'(x) \pm g'(x) .$$

أي أن المشتقة الأولى لحاصل جمع أو طرح دالتين هي حاصل جمع أو طرح مشتقتي الدالتين .

مثال (13):

أوجد المشتقة الأولى للدوال التالية:

1. $y = x^3 + 5$. 2. $y = 3x^2 - 4x - 6$.

3. $y = 2\sqrt[3]{x} + 3x^5$. 4. $y = x^9 - 2x^2 + 8x^{-3}$.

الحل:

1. $y' = 3x^{3-1} + 0 = 3x^2$.

2. $y' = 3(2)x^{2-1} - 4x^{1-1} - 0 = 6x - 4$.

3. $y' = 2\left(\frac{1}{3}\right)x^{\frac{1}{3}-1} + 3(5)x^{5-1} = \frac{2}{3}x^{-\frac{2}{3}} + 15x^4$

$$= \frac{2}{3\sqrt[3]{x^2}} + 15x^4 .$$

4. $y' = 9x^{9-1} - 2(2)x^{2-1} + 8(-3)x^{-3-1}$

$$= 9x^8 - 4x - 24x^{-4} .$$

مثال(14):

أوجد قيمة المشتقة الأولى للدوال التالية عند قيم x_0 المشار إليها:

1. $f(x) = x^3 - 5x^2 + x - 7$ $x_0 = -1$.

2. $f(x) = x^4 - 3x^2 + 3$ $x_0 = 2$.

الحل:

1. $f'(x) = 3x^2 - 10x + 1$

$$f'(-1) = 3(-1)^2 - 10(-1) + 1 = 3 + 10 + 1 = 14$$

2. $f'(x) = 4x^3 - 6x$

$$f'(2) = 4(2)^3 - 6(2) = 32 - 12 = 20 \ .$$

اشتقاق حاصل ضرب دالتين:

إذا كانت $y = f(x)g(x)$ فإن:

$$y' = \frac{dy}{dx} = f(x)g'(x) + g(x)f'(x) \ .$$

أي أن المشتقة الأولى لحاصل ضرب دالتين يساوي حاصل ضرب الدالة الأولى في المشتقة الأولى للدالة الثانية مضافاً له حاصل ضرب الدالة الثانية في المشتقة الأولى للدالة الأولى.

مثال (15):

أوجد المشتقة الأولى للدوال التالية:

1. $y = 5x^2\left(x^3 - 2x\right)$.
2. $y = \left(2x^4 + x\right)\left(3x - 1\right)$.

الحل:

1. $y = 5x^2\left(x^3 - 2x\right)$

على إعتبار أن $5x^2$ هي الدالة الأولى و $x^3 - 2x$ هي الدالة الثانية فإن:

$$y' = 5x^2\left(3x^2 - 2\right) + \left(x^3 - 2x\right)\left(10x\right)$$

$$= 15x^4 - 10x^2 + 10x^4 - 20x^2$$

$$= 25x^4 - 30x^2 .$$

ويمكن أن نستخدم القوانين السابقة لإيجاد المشتقة وذلك بعد فك الأقواس:

$$y = 5x^2\left(x^3 - 2x\right) = 5x^5 - 10x^3$$

$$y' = 25x^4 - 30x^2 .$$

2. $y = \left(2x^4 + x\right)\left(3x - 1\right)$

على إعتبار أن $2x^4 + x$ هي الدالة الأولى و $3x - 1$ هي الدالة الثانية فإن:

$$y' = \left(2x^4 + x\right)\left(3\right) + \left(3x - 1\right)\left(8x^3 + 1\right)$$

$$= 6x^4 + 3x + 24x^4 + 3x - 8x^3 - 1$$

$$= 30x^4 - 8x^3 + 6x - 1 .$$

و أيضاً بفك الأقواس واستخدام القوانين السابقة نوجد المشتقة:

$$y=\left(2x^{4}+x\right)\left(3x-1\right)=6x^{5}-2x^{4}+3x^{2}-x$$

$$y'=30x^{4}-8x^{3}+6x-1\ .$$

اشتقاق قسمة دالتين:

إذا كانت $y=\dfrac{f(x)}{g(x)}$ **بحيث أن** y **معرفة دائماً (أي أن** $g(x)\neq 0$**) فإن:**

$$y'=\frac{dy}{dx}=\frac{g(x)f'(x)-f(x)g'(x)}{\left(g(x)\right)^{2}}\ .$$

أي أن المشتقة الأولى لقسمة دالتين تساوي المقام في مشتقة البسط مطروحاً منه البسط في مشتقة المقام والمقدار بالكامل مقسوماً على مربع المقام:

مثال (16):

أوجد المشتقة الأولى للدالة $y=\dfrac{4x^{2}-x}{2x-1}$.

الحل:

$$y'=\frac{(2x-1)(8x-1)-\left(4x^{2}-4\right)(2)}{(2x-1)^{2}}$$

$$=\frac{16x^{2}-2x-8x+1-8x^{2}+8}{(2x-1)^{2}}=\frac{8x^{2}-10x+9}{(2x-1)^{2}}\ .$$

اشتقاق دالة مرفوعة لأس ثابت:

إذا كانت $y = (f(x))^a$ حيث a ثابت حقيقي فإن:

$$y' = \frac{dy}{dx} = a(f(x))^{a-1} f'(x) .$$

مثال (17):

أوجد المشتقة الأولى للدالة التالية:

1. $y = (4x^5 - 2x)^3$.

2. $y = \sqrt{2x^3 - 6}$.

الحل:

1. $y = (4x^5 - 2x)^3$

$$y' = 3(4x^5 - 2x)^{3-1}(20x^4 - 2)$$

$$= 3(4x^5 - 2x)^2(20x^4 - 2).$$

2. $y = \sqrt{2x^3 - 6} = (2x^3 - 6)^{\frac{1}{2}}$

$$y' = \frac{1}{2}\left(2x^3-6\right)^{\frac{1}{2}-1}\left(6x^2\right) = \frac{1}{2}\left(2x^3-6\right)^{-\frac{1}{2}}\left(6x^2\right)$$

$$= \frac{6x^2}{2\sqrt{2x^3-6}} = \frac{3x^2}{\sqrt{2x^3-6}} .$$

مثال (18):

أوجد معادلة المماس للدوال التالية عند قيم x_0 المحددة:

1. $f(x) = 3x^2 - 2x$ $\qquad x_0 = 2 .$

2. $f(x) = \dfrac{3}{x-1}$ $\qquad x_0 = 4 .$

الحل:

1. نوجد ميل المماس أولاً للدالة $f(x)$ عند $x_0 = 2$:

$$f'(x) = 6x - 2$$

$$m_{x_0=2} = f'(2) = 6(2) - 2 = 10 .$$

نوجد قيمة الدالة $f(x)$ عند $x_0 = 2$:

$$y_0 = f(2) = 3(2)^2 - 2(2) = 8 .$$

إذاً معادلة المماس للدالة $f(x)$ عند $x_0 = 2$ و $y_0 = 8$ هي:

$$y - y_0 = m\left(x - x_0\right)$$

$$y-8=10(x-2)$$

$$y-8=10x-20$$

$$y=10x-12\ .$$

2. نوجد ميل المماس أولاً للدالة $f(x)$ عند $x_0=4$:

$$f'(x)=\frac{-3}{(x-1)^2}$$

$$m_{x_0=4}=f'(4)=\frac{-3}{(4-1)^2}=\frac{-3}{9}=\frac{-1}{3}\ .$$

نوجد قيمة الدالة $f(x)$ عند $x_0=4$:

$$y_0=f(4)=\frac{3}{4-1}=1\ .$$

إذاً معادلة المماس للدالة $f(x)$ عند $x_0=4$ و $y_0=1$ هي:

$$y-y_0=m(x-x_0)$$

$$y-1=\tfrac{-1}{3}(x-4)$$

$$y-1=\tfrac{-1}{3}x+\tfrac{4}{3}$$

$$y=\tfrac{-1}{3}x+\tfrac{7}{3}\ .$$

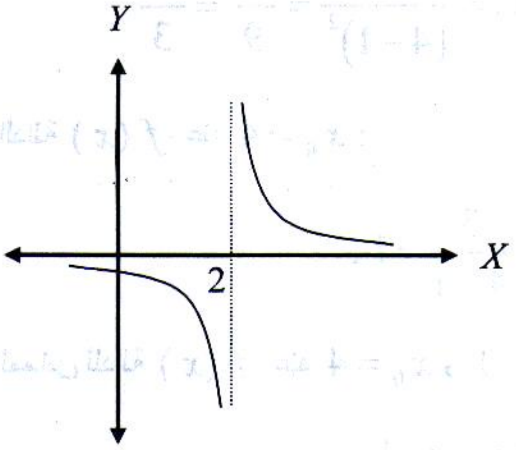
(7 – 5) الدوال غير القابلة للإشتقاق:

سنذكر للقارئ بعض الأسباب التي تجعل دالة ما $f(x)$ غير قابلة للإشتقاق عند نقطة معينة x_1 واقعة في مجالها و يمكن تلخيصها فيما يلي:

1. أن تكون الدالة $f(x)$ غير متصلة عند النقطة x_1 . فعلى سبيل المثال الدالة:

$$f(x)=\frac{3}{x-2}$$

غير متصلة عند $x_1=2$ لأن الدالة غير معرفة عند تلك القيمة. انظر الشكل التالي:



ومشتقة الدالة $f(x)$ هي:

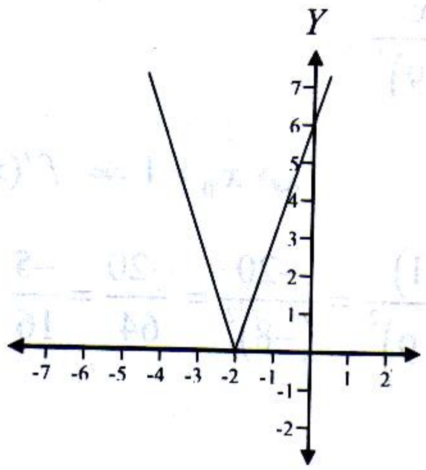
$$f'(x)=\frac{-3}{(x-2)^2}$$

ونلاحظ أن $f'(2)=\frac{-3}{0}$ أي أن الدالة $f'(x)$ غير معرفة عند $x_1=2$.
وبالتالي $f(x)$ غير قابلة للإشتقاق عند $x_1=2$.

2. أن تكون الدالة $f(x)$ متصلة عند النقطة x_1 ولكن يكون خط التماس لمنحنى الدالة رأسياً عند تلك النقطة أو لايوجد خط تماس لمنحنى الدالة عند تلك النقطة مثل أن تكون رأس زاوية في منحنى الدالة . فعلى سبيل المثال الدالة:

$$f(x) = |3x + 6|$$

متصلة لجميع قيم $x \in \mathbb{R}$. انظر الشكل:



ولكن عند $x_1 = -2$ (وهي القيمة التي عندها $f(x) = 0$) المنحنى له رأس زاويةعند هذه النقطة ولايمكن إيجاد مماس للمنحنى عند هذا الرأس. وبما أن مشتقة الدالة عند نقطة تعني ميل المماس وهو غير موجود للمنحنى عند تلك النقطة، فإن $f'(-2)$ غير معرفة وبالتالي فإن الدالة $f(x)$ ليس لها مشتقة عند $x_1 = -2$.

مثال (19):

هل الدالة التالية قابلة للإشتقاق عند النقطة x_0 المبينة وإذا كانت قابلة للاشتقاق أوجد قيمة المشتقة عند تلك النقطة.

$$f(x) = \frac{10}{x^2 - 9} \quad , \quad x_0 = 3 \ , \ x_0 = 1 \ .$$

الحل:

- عند $x_0 = 3$ الدالـة $f(x)$ غيـر معرفـة لأن المقـام صـفر وبالتـالي الدالـة $f(x)$ عند $x_0 = 3$ غير قابلة للاشتقاق .
- عند $x_0 = 1$ الدالة $f(x)$ متصلة ومشتقة الدالة هي:

$$f'(x) = \frac{-20x}{\left(x^2 - 9\right)^2} .$$

وقيمة $f'(x)$ عند $x_0 = 1$ هي:

$$f'(1) = \frac{-20(1)}{\left((1)^2 - 9\right)^2} = \frac{-20}{(-8)^2} = \frac{-20}{64} = \frac{-5}{16} .$$

(7 – 6) المشتقات من رتب أعلى:

إذا كان لدينا دالة $f(x)$ قابلة للإشتقاق على فترة معينة فإننا نحصل على دالة جديدة $g(x)$ هي دالة المشتقة $g(x) = f'(x)$ وإذا كانت $g(x)$ قابلة للإشتقاق على الفترة نفسها نحصل على دالـة ثالثـة $h(x) = g'(x)$ أي ان $h(x) = f''(x)$ وبـنفس الطريقـة يمكـن إشـتقاق الدالـة $h(x)$ لنحـصل علـى دالـة جديـدة $e(x) = h'(x) = f'''(x)$ وعلـى نفـس الـنمط نحـصل علـى المـشتقة الرابعـة. وللدلالة علـى المشتقة الثانيـة يستخدم الترميز $\frac{d^2y}{dx^2}$ أو $f''(x)$ أو y'' . وللدلالـة على المشتقة الثالثة يستخدم الترميز $\frac{d^3y}{dx^3}$ أو $f'''(x)$ أو y'''. بينما للدلالـة على

المشتقة الرابعة يستخدم الترميز $\frac{d^4y}{dx^4}$ أو $f^{(4)}(x)$ أو $y^{(4)}$. وبشكل عام لدلالة على المشتقة النونية يستخدم الترميز $\frac{d^ny}{dx^n}$ أو $f^{(n)}(x)$ أو $y^{(n)}$.

مثال (20):

أوجد المشتقة الثانية والثالثة للدوال التالية:

1. $y = 2x^4 - 3x^2 + 5x - 1$.
2. $y = x^5 + 7x^2 - 2x^{-2}$.

الحل:

1. $y' = 8x^3 - 6x + 5$ المشتقة الأولى

$y'' = 24x^2 - 6$ المشتقة الثانية

$y''' = 48x$ المشتقة الثالثة .

2. $y' = 5x^4 + 14x + 4x^{-3}$ المشتقة الأولى

$y'' = 20x^3 + 14 - 12x^{-4}$ المشتقة الثانية

$y''' = 60x^2 + 48x^{-5}$ المشتقة الثالثة .

مثال (21):

1. $f(x) = x^4 - 5x^2 + 3x$ أوجد $f'(0)$ و $f''(1)$.
2. $f(x) = (x-2)^3$ أوجد $f''(-1)$ و $f'''(3)$.

الحل:

1. $f'(x) = 4x^3 - 10x + 3$

$f'(0) = 4(0)^3 - 10(0) + 3 = 0 - 0 + 3 = 3$

$f''(x) = 12x^2 - 10$

$f''(1) = 12(1)^2 - 10 = 12 - 10 = 2.$

2. $f'(x) = 3(x-2)^2$

$f''(x) = 6(x-2) = 6x - 12$

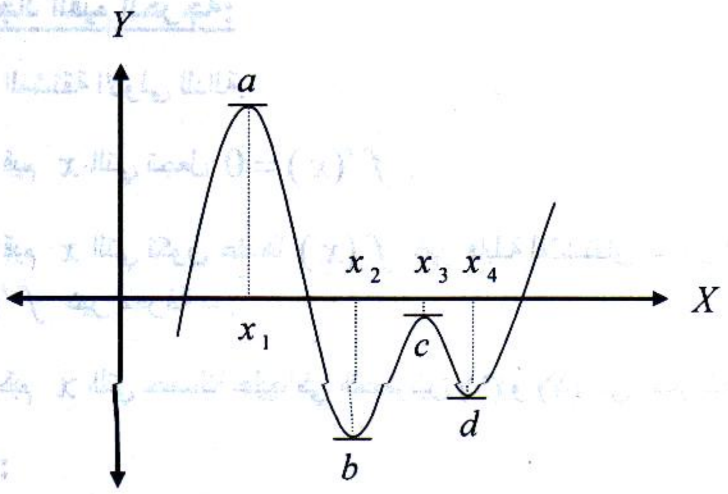
$f''(-1) = 6(-1) - 12 = -6 - 12 = -18$

$f'''(x) = 6$

$f'''(3) = 6.$

(7 – 7) القيم القصوى (العظمى والصغرى):

القيم القصوى المطلقة للدالة هي أعلى قيمة أو أدنى قيمة تأخذها الدالة خلال المجال الكلي للمتغير x . على أنه يجب أن نلاحظ أنه يوجد قيم قصوى محلية للدالة تكون أعلى أو أدنى من قيم الدالة المجاورة لها في فترة صغيرة حولها. وتسمى هذه القيم بالقيم العظمى المحلية والقيم الصغرى المحلية . والرسم التالي يوضح بعض القيم القصوى المحلية:



من الرسم يتبين أن القيم a و b و c و d تمثل القيم القصوى المحلية للدالة بالنسبة للقيم المجاورة لها. القيمتان a و c تمثل كل منهما أعلى قيمة للدالة بالنسبة للقيم المجاورة لها، وبالتالي كل منهما هي قيمة عظمى محلية على المنحنى. والقيمتان b و d تمثل كل منهما أدنى قيمة للدالة بالنسبة للقيم المجاورة لها, وبذلك تكونان قيم صغرى محلية على المنحنى. ولذلك نقول أن منحنى هذه الدالة له قيمة عظمى محلية عند كل من x_1 و x_3 , وله قيمة صغرى محلية عند كل من x_2 و x_4 . وتسمى القيم x_1 و x_2 و x_3 و x_4 بالقيم الحرجة . ويلاحظ الطالب في هذا المثال أن القيمة b هي قيمة قصوى محلية ومطلقة في نفس الوقت.

ولإيجاد القيم القصوى المحلية لأي دالة ينبغي أولاً إيجاد القيم الحرجة لها النظرية المهمة التالية تخدمنا كثيرا في هذا الصدد:

نظرية:

إذا كانت $f(x)$ دالة قابلة للإشتقاق على فترة معينة وكانت x_0 قيمة حرجة داخل هذه الفترة فإن $f'(x_0) = 0$ أي أن قيمة المشتقة عند القيمة الحرجة تساوي الصفر.

خطوات إيجاد القيم الحرجة:

(1) نوجد المشتقة الأولى للدالة.

(2) نوجد قيم x التي تجعل $f'(x) = 0$.

(3) نوجد قيم x التي تكون عندها $f(x)$ غير قابلة للاشتقاق – أي التي عندها $f'(x)$ غير معرفة – .

(4) تكون قيم x التي حصلنا عليها في الخطوتين (3) و (4) هي القيم الحرجة .

مثال (22):

أوجد القيم الحرجة للدوال التالية:

1. $f(x) = x^2 + 8x + 2$.
2. $f(x) = x^3 - 12x - 1$.

الحل:

1. ايجاد المشتقة الأولى:

$$f'(x) = 2x + 8 .$$

نساوي المشتقة بالصفر ونحل المعادلة:

$$2x + 8 = 0 \quad \text{فإن} \quad x = -4$$

القيمة الحرجة هي $x = -4$.

2. ايجاد المشتقة الأولى:

$$f'(x) = 3x^2 - 12 .$$

نساوي المشتقة بالصفر ونحل المعادلة:

$$3x^2 - 12 = 0 \quad \text{فإن} \quad x = -2 \ , \ x = 2$$

القيم الحرجة هي $x = -2 \ , \ x = 2$.

في الأمثلة السابقة نجد القيم الحرجة للدوال ولكن دون أن نميز أي من القيم الحرجة تقابل قيمة عظمى محلية للدالة وأيها تقابل قيمة صغرى محلية , والمشتقة الثانية تخدمنا كثيرا بهذا الخصوص .

اختبار المشتقة الثانية:

إذا كانت $x = c$ قيمة حرجة للدالة $f(x)$ أي أن $f'(c) = 0$ فإن:

1. **للدالة $f(x)$ قيمة عظمى محلية عند $x = c$ إذا كانت $f''(c) < 0$.**
2. **للدالة $f(x)$ قيمة صغرى محلية عند $x = c$ إذا كانت $f''(c) > 0$.**

أي أن إذا كانت قيمة المشتقة الثانية بعد تعويض القيمة الحرجة $x = c$ سالبة فعند هذه القيمة الحرجة يكون للدالة قيمة عظمى محلية, أما إذا كانت قيمة المشتقة الثانية موجبة فعند هذه القيمة الحرجة قيمة صغرى محلية. ولإيجاد هذه القيمة العظمى أو الصغرى المحلية نعوض القيمة الحرجة c في الدالة أي نجد قيمة $f(c)$.

مثال (23):

أوجد القيمة العظمى والصغرى المحلية للدوال التالية:

1. $f(x) = x^3 - 3x^2 + 5$.
2. $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 15$.

الحل:

1. نوجد أولاً القيم الحرجة:

$$f'(x) = 3x^2 - 6x = 0$$

والقيم الحرجة هي $x = 2$, $x = 0$. ثم نوجد القيمة العظمى والقيمة الصغرى المحلية:

$$f''(x) = 6x - 6 .$$

- عند $x = 0$

$$f''(0) = 6(0) - 6 = -6 < 0$$

بما أن إشارة قيمة المشتقة الثانية عند $x = 0$ سالبة فإن للدالة قيمة عظمى محلية عند $x = 0$ والقيمة العظمى المحلية هي $f(0)$ أي أن:

$$f(0) = (0)^3 - 3(0)^2 + 5 = 5 .$$

هي قيمة عظمى محلية عند $x = 0$ للدالة $f(x)$.

- عند $x = 2$

$$f''(2) = 6(2) - 6 = 6 > 0 .$$

بما أن إشارة قيمة المشتقة الثانية عند $x = 2$ موجبة فإن للدالة قيمة صغرى محلية عند $x = 2$ والقيمة الصغرى المحلية هي $f(2)$ أي أن:

$$f(2) = (2)^3 - 3(2)^2 + 5 = 8 - 12 + 5 = 1$$

هي قيمة صغرى محلية عند $x = 2$ للدالة $f(x)$.

2. أولاً نوجد القيم الحرجة :

$$f'(x) = 6x^2 + 6x - 12 = 0$$

والقيم الحرجة هي $x = 1$, $x = -2$. ثم نجد القيمة العظمى والقيمة الصغرى المحلية:

$$f''(x) = 12x + 6 .$$

- عند $x = -2$:

$$f''(-2) = 12(-2) + 6 = -24 + 6 = -18 < 0$$

بما أن إشارة قيمة المشتقة الثانية عند $x = -2$ سالبة فإن للدالة قيمة عظمى محلية عند $x = -2$ والقيمة العظمى المحلية هي $f(-2)$ أي أن:

$$f(-2) = 2(-2)^3 + 3(-2)^2 - 12(-2) + 15 = 35$$

هي قيمة عظمى محلية عند $x = -2$ للدالة $f(x)$.

- عند $x = 1$:

$$f''(1) = 12(1) + 6 = 12 + 6 = 18 > 0$$

بما أن قيمة المشتقة الثانية عند $x = 1$ موجبة فإن للدالة قيمة صغرى محلية عند $x = 1$ والقيمة الصغرى المحلية هي $f(1)$ أي ان:

$$f(1) = 2(1)^3 + 3(1)^2 - 12(1) + 15 = 8$$

هي قيمة صغرى محلية عند $x = 1$ للدالة $f(x)$.

تمارين

1. أوجد النهاية في كل مما يلي:

a) $\lim\limits_{x \to 6} 7$.

b) $\lim\limits_{x \to 5} (-2)$.

c) $\lim\limits_{x \to 0^+} 12$.

d) $\lim\limits_{x \to -2} 3x$.

e) $\lim\limits_{x \to 3^-} 6x$.

f) $\lim\limits_{x \to 2} (x-3)(x+5)$.

g) $\lim\limits_{x \to -1} x^6 - 12x + 1$.

h) $\lim\limits_{x \to 4} \sqrt{3x+4}$.

i) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2-1}{x+1}$.

j) $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x^2-2x}{x+1}$.

k) $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{(x-1)(x-2)}{x+1}$.

l) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{6x-9}{x^3-12x+3}$.

m) $\lim\limits_{x \to 4} \dfrac{x^2-16}{x-4}$.

n) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^3-1}{x-1}$.

o) $\lim_{x \to -2} \dfrac{x^3+8}{x+2}$.

p) $\lim_{x \to 2} \dfrac{x^2-x-2}{x^2-4}$.

q) $\lim_{x \to 6} \dfrac{x^2+6x}{x^2-36}$.

r) $\lim_{x \to 3} \dfrac{x^2-6x+9}{x-3}$.

s) $\lim_{x \to -4} \dfrac{2x+8}{x^2+x-12}$.

t) $\lim_{x \to -1} \dfrac{x^2+6x+5}{x^2-3x-4}$.

u) $\lim_{x \to 2} \dfrac{x^2-4x+4}{x^2+x-6}$.

v) $\lim_{x \to 2} \left(\dfrac{x^2-4}{2x-4}\right)^4$.

w) $\lim_{x \to -2} \left(\dfrac{x^2-x-6}{x+2}\right)^2$.

x) $\lim_{x \to 2} \left(\sqrt{x^2+3x-1}\right)^4$.

2. لتكن $f(x) = \begin{cases} x-1 & x \le 3 \\ 3x-7 & x > 3 \end{cases}$ أوجد ما يلي:

a) $\lim_{x \to 3^-} f(x)$.

b) $\lim_{x \to 3^+} f(x)$.

c) $\lim_{x \to 3} f(x)$.

3. لتكن $f(x)=\begin{cases} x^2 & x\le 0 \\ x-2 & x>0 \end{cases}$ أوجد ما يلي:

a) $\lim_{x\to 0^-} f(x)$.   b) $\lim_{x\to 0^+} f(x)$.   c) $\lim_{x\to 0} f(x)$.

4. أوجد نهاية الدوال التالية عند x_0 النقطة الموضحة :

a) $f(x)=\begin{cases} 3x+1 & x\le 3 \\ 4x-1 & x>3 \end{cases}$ ، $x_0=3$.

b) $f(x)=\begin{cases} 3x+2 & x\le 1 \\ 5x & x>1 \end{cases}$ ، $x_0=1$.

c) $f(x)=\begin{cases} x^2-2x+1 & x\ne 3 \\ 7 & x=3 \end{cases}$ ، $x_0=3$.

d) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2-1}{x+1} & x<-1 \\ x^2-3 & x\ge -1 \end{cases}$ ، $x_0=-1$.

5. بين ما إذا كانت الدوال التالية متصلة في النقطة x_0 المعطاة :

a) $f(x) = \dfrac{x^2 - 3x + 2}{x - 2}$ ، $x_0 = 2$.

b) $f(x) = \dfrac{x^2 + 50}{x^2}$ ، $x_0 = 5$.

c) $f(x) = 5x^2 - 2x + 1$ ، $x_0 = 2$.

d) $f(x) = \dfrac{3x + 3}{2x + 2}$ ، $x_0 = -1$.

e) $f(x) = \dfrac{4}{x} + \dfrac{2x}{x + 4}$ ، $x_0 = 4$.

f) $f(x) = \begin{cases} 2x + 3 & x \le 2 \\ 7 & x > 2 \end{cases}$ ، $x_0 = 2$.

g) $f(x) = \begin{cases} x^2 & x \ne 0 \\ x & x = 0 \end{cases}$ ، $x_0 = 0$.

h) $f(x)=\begin{cases} 2x-1 & x<2 \\ 3x & x\geq 2 \end{cases}$ ، $x_0=2$.

i) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2-9}{2x-6} & x\neq 3 \\ 5 & x=3 \end{cases}$ ، $x_0=3$.

j) $f(x)=\begin{cases} 8x-x^2 & x<1 \\ 9-2x & x=1 \\ \dfrac{7x-7}{x-1} & x>1 \end{cases}$ ، $x_0=1$.

6. في كل مما يلي أوجد قيم x التي تكون الدالة $f(x)$ غير متصلة فيها:

a) $f(x)=x^3-2x+3$. b) $f(x)=x^2-4$.

5. بين ما إذا كانت الدوال التالية متصلة في النقطة x_0 المعطاة :

a) $f(x) = \dfrac{x^2 - 3x + 2}{x - 2}$ ، $x_0 = 2$.

b) $f(x) = \dfrac{x^2 + 50}{x^2}$ ، $x_0 = 5$.

c) $f(x) = 5x^2 - 2x + 1$ ، $x_0 = 2$.

d) $f(x) = \dfrac{3x + 3}{2x + 2}$ ، $x_0 = -1$.

e) $f(x) = \dfrac{4}{x} + \dfrac{2x}{x + 4}$ ، $x_0 = 4$.

f) $f(x) = \begin{cases} 2x + 3 & x \le 2 \\ 7 & x > 2 \end{cases}$ ، $x_0 = 2$.

g) $f(x) = \begin{cases} x^2 & x \ne 0 \\ x & x = 0 \end{cases}$ ، $x_0 = 0$.

c) $f(x)=\dfrac{3}{x-3}$.   d) $f(x)=\dfrac{2x}{(x-2)(x+1)}$

e) $f(x)=\dfrac{x+2}{x^2+5x+6}$.   f) $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x^2-7x+12}$.

7. باستخدام تعريف المشتقة أوجد $f'(x)$ في كل مما يلي :

a) $f(x)=5x-2$.   b) $f(x)=3x^2$.

c) $f(x)=2x^2-x$.   d) $f(x)=4x^2+2$.

e) $f(x)=3x^2+2x+5$.   f) $f(x)=x^3$.

8. باستخدام قوانين الاشتقاق أوجد المشتقة الأولى للدوال التالية:

a) $f(x)=\left(\sqrt{2}\right)^3$.   b) $f(x)=\sqrt{5}x+0.2$.

c) $f(x)=3x^5$.   d) $f(x)=-2x^{-10}$.

e) $f(x)=\frac{3x^2-1}{3}$.

f) $f(x)=3x^6+2x^3+1$.

g) $f(x)=7x^{-5}-\frac{5}{x}$.

h) $f(x)=5\left(x^5+3x^2-4\right)$.

i) $f(x)=\frac{2}{x}-\frac{3}{x^2}$.

j) $f(x)=-x^{-10}+4\sqrt{x}$.

k) $f(x)=-3\sqrt[3]{x^2}$.

l) $f(x)=4x\left(x^3+2x^2-1\right)$.

m) $f(x)=\sqrt[3]{6x^2-3x}$

n) $f(x)=\left(2x^{-3}-1\right)\left(x^4+x\right)$.

o) $f(x)=\left(x^3+3x\right)^2$.

p) $f(x)=\left(x^4+x-8\right)^3$.

q) $f(x)=\sqrt{4x^3+10}$.

r) $f(x)=\left(x-2x^3\right)\left(x^2-4\right)$.

s) $f(x)=\frac{1}{5x-3}$.

t) $f(x)=\frac{3}{x^2+1}$.

u) $f(x)=\frac{5x}{2x+1}$.

v) $f(x)=\frac{3x-1}{x+3}$.

w) $f(x)=\frac{x^2-1}{2x}$.

x) $f(x)=\frac{4x+1}{x^2-5}$.

9. أوجد معادلة المماس لمنحنى الدوال التالية عند النقطة A المعطاة :

a) $f(x)=x^3-3x$ ، $A=(1,-2)$.

b) $f(x)=\left(x^2+1\right)^2$ ، $A=(-1,4)$.

c) $f(x)=\frac{1}{2}x^2+3x-4$ ، $A=(2,4)$.

d) $f(x)=\dfrac{4}{x^2+3}$ ، $A=(-1,1)$.

e) $f(x)=\sqrt{x+1}$ ، $A=(3,2)$.

10. أوجد المشتقات الثانية والثالثة للدوال التالية:

a) $f(x)=3x^5-5x^3$.

b) $f(x)=x^4-2x^2-12$.

c) $f(x)=3-\frac{4}{x}-\frac{4}{x^2}$.

d) $f(x)=x^6+4x^2-2x^{-2}$.

e) $f(x)=\frac{2x^5-x^3}{x^2}$.

f) $f(x)=\dfrac{1}{(x+2)^3}$.

g) $f(x)=(x-1)^4$.

h) $f(x)=(x^2-1)^4$.

i) $f(x)=\frac{2x}{x-3}$.

j) $f(x)=\frac{x}{x^2-1}$.

11.أوجد $f'(2)$ و $f''(1)$ و $f'''(-2)$ للدوال التالية:

a) $f(x)=x^4-2x^2+x$.

b) $f(x)=(x+1)^3$.

c) $f(x)=4x^3-5x^2-10x+3$.

d) $f(x)=3(x^4-x^3+1)$.

12.أوجد القيم الحرجة للدوال التالية:

a) $f(x)=2x^3-3x^2+1$.

b) $f(x)=(2x-4)^2$.

c) $f(x)=x^3-\frac{3}{2}x^2-6x$.

d) $f(x)=x^2-8x+5$.

13. أوجد القيم العظمى والصغرى المحلية للدوال التالية:

a) $f(x) = x^2 - 4x + 2$.

b) $f(x) = 3x^2 + 6x - 1$.

c) $f(x) = 8 - 2x^2$.

d) $f(x) = 2x^3 - 6x + 2$.

e) $f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x - 1$.

f) $f(x) = x^3 - x^2 - 5x - 2$.

g) $f(x) = 3x^2 - 2x^3$.

h) $f(x) = (x - 2)^3$.

الفصل الثامن

مدخل لتكامل الدوال

مدخل لتكامل الدوال

في كثير من العمليات الرياضية نلاحظ أن كل عملية لها عملية عكسية تقابلها, فالطرح هو العملية العكسية للجمع, والقسمة هي العملية العكسية للضرب, واستخراج الجذور هو العملية العكسية للرفع إلى قوى. وعلى نفس النمط فأن عملية التكامل هي العملية العكسية للتفاضل.

(8 – 1) الدالة الأصلية:

نعلم أن لكل دالة $g(x)$ قابلة للإشتقاق دالة تناظرها هي دالة المشتقة $g'(x)$. فهل من الممكن عكس العملية؟ فإذا أعطيت دالة المشتقة $g'(x)$ هل من الممكن إيجاد الدالة الأصلية $g(x)$ ؟. أو بعبارة أخرى إذا أعطينا دالة $f(x)$ هل من الممكن إيجاد دالة $F(x)$ بحيث تحقق المعادلة $F'(x) = f(x)$.

<u>**تعريف الدالة الأصلية:**</u>

تسمى الدالة $F(x)$ دالة أصلية للدالة $f(x)$ إذا كان $F'(x) = f(x)$.

فعلى سبيل المثال: إن الدالة $F_1(x) = x^3$ هي دالة أصلية للدالة $f(x) = 3x^2$ (لأن $F'(x) = 3x^2 = f(x)$) . ونود هنا طرح سؤال هل هناك دالة أصلية أخرى للدالة $f(x) = 3x^2$ ؟. نلاحظ أن كلا من الدالتين $F_2(x) = x^3 + 1$ و $F_3(x) = x^3 - 2$ هي دالة أصلية للدالة المعطاة $f(x)$ لأن كلاهما يحققان $F_i'(x) = f(x)$.

h) $f(x)=\begin{cases} 2x-1 & x<2 \\ 3x & x\geq 2 \end{cases}$ ، $x_0=2$.

i) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2-9}{2x-6} & x\neq 3 \\ 5 & x=3 \end{cases}$ ، $x_0=3$.

j) $f(x)=\begin{cases} 8x-x^2 & x<1 \\ 9-2x & x=1 \\ \dfrac{7x-7}{x-1} & x>1 \end{cases}$ ، $x_0=1$.

6. في كل مما يلي أوجد قيم x التي تكون الدالة $f(x)$ غير متصلة فيها:

a) $f(x)=x^3-2x+3$. b) $f(x)=x^2-4$.

إن هذا يقودنا إلى الاستنتاج بأن للدالة $f(x) = 3x^2$ عدداً لاحصر له من الدوال الأصلية لأنه عند إضافة أي عدد ثابت للدالة الأصلية $F_1(x)$ نحصل على دالة أصلية جديدة لنفس الدالة $f(x)$.

نظرية:

إذا كانت الدالة $F(x)$ دالة أصلية للدالة $f(x)$ فإن جميع الدوال على الصورة $F(x)+c$ حيث c ثابت حقيقي إختياري هي أيضاً دوال أصلية لنفس الدالة $f(x)$.

مثال (1):

أوجد جميع الدوال الأصلية للدالة $f(x) = 2x$.

الحل:

نعرف أن مشتقة x^2 هي $2x$ وعليه فإن جميع الدوال الأصلية للدالة $f(x) = 2x$ هي على الصورة:

$$F(x) = x^2 + c$$ حيث c ثابت حقيقي إختياري.

مثال (2):

تحقق من أن الدالة $F(x) = 2x^4 + 3x^2 + 3x - 1$ هي دالة أصلية للدالة $f(x) = 8x^3 + 6x + 3$.

الحل:

إذا تحقق الشرط $F'(x) = f(x)$ فإن $F(x)$ هي دالة أصلية للدالة $f(x)$ ،

ولدينا:

$$F'(x) = 8x^3 + 6x + 3 = f(x)$$

وبالتالي $F(x)$ هي دالة أصلية للدالة $f(x)$.

(8 – 2) التكامل غير المحدود:

إن عملية إيجاد جميع الدوال الأصلية لدالة $f(x)$ تسمى التكامل غير المحدود للدالة $f(x)$ ونرمز له بالرمز $\int f(x)\, dx$. ومن النظرية السابقة يكفي معرفة دالة أصلية واحدة $F(x)$ للدالة $f(x)$ فنجد أن:

$$\int f(x)\, dx = F(x) + c \ .$$

حيث c ثابت حقيقي إختياري و $F'(x) = f(x)$. ويسمى الرمز $\int$ بإشارة التكامل ونقرأ $\int f(x)\, dx$ تكامل $f(x)$ بالنسبة إلى x . بينما dx تشير إلى أن هذه العملية يجب إجرائها بالنسبة إلى المتغير x . ويسمى الثابت الحقيقي الإختياري c بثابت التكامل. الجدول التالي يوضح عملية التفاضل لبعض الدوال والعملية العكسية له وهي التكامل غير المحدود.

صيغة التكامل غير المحدود	صيغة المشتقة
$\int 4x^3\, dx = x^4 + c$	$\frac{dy}{dx}\left[x^4\right] = 4x^3$
$\int \left[6x^2 + 5\right] dx = 2x^3 + 5x + c$	$\frac{dy}{dx}\left[x^4\right] = 4x^3$
$\int \left[x - 2x^{-3}\right] dx = \frac{1}{2}x^2 + x^{-2} + c$	$\frac{dy}{dx}\left[x^4\right] = 4x^3$

ويمكن إعادة ماذكر أعلاه في التعريف التالي:

التكامل الغير محدود:

إذا كانت $F'(x) = f(x)$ فإن التكامل غير المحدود للدالة $f(x)$ هو:

$$\int f(x)\,dx = F(x) + c \ .$$

حيث أن c ثابت حقيق إختياري يسمى ثابت التكامل .

ولأي قيمة معينة c_1 للثابت c نحصل على دالة أصلية $F_1(x) = F(x) + c_1$.
ومن الممكن إيجاد قيمة c_1 عند معرفة قيمة $F_1(x_1)$ لقيمة معينة x_1 .

اصطلاح:

إذا كانت $f(x) = 1$ فإن التكامل $\int 1\,dx$ يختصر بالشكل $\int dx$. كما نكتب $\int \frac{dx}{x^n}$ بدلاً من $\int \frac{1}{x^n}\,dx$.

ولتسهيل عملية إيجاد التكامل غير المحدود للدوال سنقدم بعض قوانين التكامل المهمة:

(8 – 3) قوانين التكامل الغير محدود:

تكامل العدد الثابت:

إذا كان a عدداً حقيقياً ثابتاً فإن:

$\int a\,dx = ax + c$ ، **حيث c ثابت حقيقي إختياري.**

أي أن تكامل الثابت يساوي الثابت مضروب في x مضافاً له ثابت التكامل.

مثال (3):

1. $\int 2\,dx = 2x + c$.
2. $\int -1\,dx = -x + c$.
3. $\int dx = x + c$.

تكامل دالة القوة:

إذا كان a عدداً حقيقياً بحيث $a \neq -1$ فإن:

$\int x^{a}\,dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + c$ ، **حيث c ثابت حقيقي إختياري.**

أي أن تكامل x^{a} هو x^{a+1} مقسوماً على العدد $a+1$ مع إضافة ثابت التكامل الإختياري c .

مثال (4):

أوجد تكامل كل ممايلي:

1. $\int x^{2}\,dx$.
2. $\int x^{-5}\,dx$.
3. $\int \frac{1}{x^{3}}\,dx$.
4. $\int \sqrt{x}\,dx$.

الحل:

$$1.\quad \int x^2\,dx = \frac{x^{2+1}}{2+1} + c = \tfrac{1}{3}x^3 + c\ .$$

$$2.\quad \int x^{-5}\,dx = \frac{x^{-5+1}}{-5+1} + c = \tfrac{-1}{4}x^{-4} + c = \frac{-1}{4x^4} + c\ .$$

$$3.\quad \int \frac{1}{x^3}\,dx = \int x^{-3}\,dx = \frac{x^{-3+1}}{-3+1} + c$$

$$= \tfrac{-1}{2}x^{-2} + c = \frac{-1}{2x^2} + c\ .$$

$$4.\quad \int \sqrt{x}\,dx = \int x^{\frac{1}{2}}\,dx = \frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + c$$

$$= \tfrac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + c = \tfrac{2}{3}\sqrt{x^3} + c$$

<u>تكامل الدالة المضروبة بعدد ثابت:</u>

إذا كان a ثابت حقيقي فإن:

$$\int a\,f(x)\,dx = a\int f(x)\,dx\ .$$

أي أن تكامل الدالة المضروبة ثابت حقيقي يساوي حاصل ضرب العدد الثابت في تكامل الدالة.

مثال (5):

أوجد تكامل مايلي:

1. $\int 2x\ dx$.
2. $\int 12x^2\ dx$.
3. $\int \frac{9}{x^4}\ dx$.
4. $\int -4\sqrt[3]{x}\ dx$.

الحل:

1. $\int 2x\ dx = 2\int x\ dx = 2\frac{x^{1+1}}{1+1} + c = 2\frac{x^2}{2} + c = x^2 + c$.

2. $\int 12x^2\ dx = 12\int x^2\ dx = 12\frac{x^3}{3} + c = 4x^3 + c$.

3. $\int \frac{9}{x^4}\ dx = 9\int x^{-4}\ dx = 9\frac{x^{-3}}{-3} + c = \frac{-3}{x^3} + c$.

4. $\int -4\sqrt[3]{x}\ dx = -4\int x^{\frac{1}{3}}\ dx = -4\frac{x^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}} + c = -3\sqrt[3]{x^4} + c$.

تكامل مجموع أو فرق دالتين:

إذا كانت $f(x)$ **و** $g(x)$ **دالتين قابلتين للتكامل فإن:**

$$\int [f(x) \pm g(x)]\ dx = \int f(x)\ dx \pm \int g(x)\ dx\ .$$

أي أن تكامل مجموع دالتين أو أكثر يساوي مجموع تكامل تلك الدوال. وكذلك بالنسبة للفرق.

مثال (6):

أوجد تكامل مايلي:

$$1.\ \int\left(x^{3}-2x\right)dx\ . \qquad 2.\ \int\left(x^{\frac{2}{3}}-6x^{2}+4\right)dx\ .$$

$$3.\ \int\left(\frac{x^{5}+2x^{2}-1}{x^{4}}\right)dx\ . \qquad 4.\ \int\left(1+x^{2}\right)\left(2-x\right)dx\ .$$

الحل:

$$1.\ \int\left(x^{3}-2x\right)dx=\int x^{3}\,dx-\int 2x\,dx$$

$$=\frac{x^{4}}{4}+2\frac{x^{2}}{2}+c=\frac{1}{4}x^{4}+x^{2}+c\ .$$

$$2.\ \int\left(x^{\frac{2}{3}}-6x^{2}+4\right)dx=\int x^{\frac{2}{3}}\,dx-\int 6x^{2}\,dx+\int 4\,dx$$

$$=\frac{x^{\frac{5}{3}}}{\frac{5}{3}}-6\frac{x^{3}}{3}+4x+c$$

$$=\frac{3}{5}\sqrt[3]{x^{5}}-2x^{3}+4x+c\ .$$

$$3.\ \int\left(\frac{x^{5}+2x^{2}-1}{x^{4}}\right)dx=\int\left(\frac{x^{5}}{x^{4}}+\frac{2x^{2}}{x^{4}}-\frac{1}{x^{4}}\right)dx$$

$$=\int x\,dx+\int 2x^{-2}\,dx-\int x^{-4}\,dx$$

$$=\frac{x^{2}}{2}+2\frac{x^{-1}}{-1}-\frac{x^{-3}}{-3}+c$$

$$=\frac{1}{2}x^{2}-\frac{2}{x}+\frac{1}{3x^{3}}+c\ .$$

$$4.\int(1+x^2)(2-x)dx = \int(2-x+2x^2-x^3)\,dx$$

$$= \int 2\,dx - \int x\,dx + \int 2x^2\,dx - \int x^3 dx$$

$$= 2x - \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{2}{3}x^3 - \tfrac{1}{4}x^4 + c\ .$$

مثال (7):

أوجد الدالة $F(x)$ علماً أن $F(0)=10$ حيث:

$$F(x) = \int(3x^2-6x-2)dx\ .$$

الحل:

$$F(x) = \int(3x^2-6x-2)dx = 3\frac{x^3}{3} - 6\frac{x^2}{2} - 2x + c$$

ومنه $F(x) = x^3 - 3x^2 - 2x + c$.

ولإيجاد قيمة ثابت التكامل c لدينا معطى $F(0)=10$:

$$F(0) = (0)^3 - 3(0)^2 - 2(0) + c = 10$$

ومنه $c = 10$

وبالتالي: $F(x) = x^3 - 3x^2 - 2x + 10$

(8 – 3) التكامل المحدود:

لتكن $F(x)$ دالـة أصلية لدالـة $f(x)$ ذكرنـا سابقاً أن التكامل غير المحدود للدالـة $f(x)$ بالنسبة إلى x هو مجموعة الدوال الأصلية $F(x)+c$. ونلاحظ هنا بأخـذ أي قيمـة معينـة c_0 للثابـت الاختيـاري c نحـصل علـى دالـة أصـلية $G(x)=F(x)+c_0$ فـإذا أخـذنا أي قيمتـين $x_1=a$ و $x_2=b$ للمتغيـر x نجد أن $G(a)=F(a)+c_0$ و $G(b)=F(b)+c_0$ ومنه فإن:

$$G(b)-G(a)=F(b)-F(a) .$$

أي أنه بغض النظر عن إختلاف الدالتين الأصليتين $F(x)$ و $G(x)$ إلا أن الفرق بين قيمتين معينتين $F(b)-F(a)$ و $G(b)-G(a)$ للدالتين الأصليتين يبقى نفسه وهذا الفرق الثابت يسمى التكامل المحدود للدالـة $f(x)$ من $x=a$ إلى $x=b$ ونرمز له بالرمز $\int_a^b f(x)\,dx$ أي أن:

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b)-F(a) .$$

ويقرأ ذلك بالتكامل المحدود لدالـة $f(x)$ بالنسبة إلى المتغير x من a إلى b . حيث يسمى كلاً من a و b بالحدين السفلي والعلوي للتكامل المحدود على التوالي.

<u>التكامل المحدود:</u>

إذا كانت الدالة $F(x)$ دالة أصلية للدالة $f(x)$ على الفترة $[a,b]$ فإن:

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^b = F(b)-F(a) .$$

نسمي العددين a و b بحدي التكامل المحدود .

ننبه الطالب هنا على وجود فرق أساسي بين التكاملين غير المحدود والمحدود حيث التكامل غير المحدود هو مجموعة دوال على الصورة $F(x)+c$ بينما التكامل المحدود هو عدد معين يساوي الفرق $F(b)-F(a)$ وليس دالة. وقد استعملنا الرمز $F(x)\Big|_a^b$ ليعني التعويض عن x بالعددين a و b لإيجاد $F(b)$ مطروحاً منه $F(a)$.

مثال (8): $\left(x^2-1\right)\Big|_2^4=\left(4^2-1\right)-\left(2^2-1\right)=15-3=12$.

من الواضح هنا أن عملية التكامل المحدود تتم بإيجاد دالة أصلية $F(x)$ ثم التعويض عن x بحدي التكامل b و a على التوالي وأخيرا طرح الناتج الثاني من الأول . فمثلاً إذا أردنا إيجاد التكامل المحدود من 2 إلى 3 للدالة $f(x)=3x^2$ فإننا أولا نوجد دالة أصلية للدالة $f(x)$ مثل $F(x)=x^3$. وبالتالي التكامل المحدود من 2 إلى 3 للدالة $f(x)=3x^2$ هو:

$$\int_2^3 f(x)\,dx=\int_2^3 3x^2\,dx=x^3\Big|_2^3=(3)^3-(2)^3=19 .$$

<u>خواص التكامل المحدود:</u>

لتكن $f(x)$ و $g(x)$ دالتين قابلتين للتكامل ولتكن a و b أعداد حقيقية عندئذٍ:

1. $\int_a^a f(x)\,dx=0$.
2. $\int_a^b kf(x)\,dx=k\int_a^b f(x)\,dx$.
3. $\int_a^b \left(f(x)\pm g(x)\right)dx=\int_a^b f(x)\,dx\pm\int_a^b g(x)\,dx$.
4. $\int_a^b f(x)\,dx=-\int_b^a f(x)\,dx$.

مثال (9):

أوجد قيمة مايلي:

1. $\int_1^2 3x^2 \, dx$.
2. $\int_{-1}^3 (2x-1) \, dx$.
3. $\int_{-1}^1 (x+1)^2 \, dx$.
4. $\int_5^5 (10-x)^{10} \, dx$.
5. $\int_1^2 4x\left(x^2-1\right) dx$.

الحل:

1. $\int_1^2 3x^2 \, dx = x^3\Big|_1^2 = 2^3-1^3 = 8-1 = 7$.

2. $\int_{-1}^3 (2x-1) \, dx = \left(x^2-x\right)\Big|_{-1}^3 = \left(3^2-3\right)-\left((-1)^2-(-1)\right)$

$$= (9-3)-(1+1) = 6-2 = 4 \ .$$

3. $\int_{-1}^1 (x+1)^2 \, dx = \int_{-1}^1 \left(x^2+2x+1\right) dx$

$$= \left(\frac{1}{3}x^3+x^2+x\right)\Big|_{-1}^1$$

$$= \left(\frac{1}{3}(1)^3+(1)^2+1\right)-\left(\frac{1}{3}(-1)^3+(-1)^2+(-1)\right)$$

$$= \left(\frac{1}{3}+1+1\right)-\left(\frac{-1}{3}+1-1\right) = \frac{7}{3}+\frac{1}{3} = \frac{8}{3} \ .$$

4. $\int_{5}^{5}(10-x)^{10}\,dx=0$.

5. $\int_{1}^{2}4x\left(x^{2}-1\right)dx=\int_{1}^{2}\left(4x^{3}-4x\right)dx=\left(x^{4}-2x^{2}\right)\Big|_{1}^{2}$

$$=\left(2^{4}-2(2)^{2}\right)-\left(1^{4}-2(1)^{2}\right)$$

$$=(16-8)-(1-2)=8+1=9\ .$$

مثال (10):

إذا كان $\int_{0}^{3}f(x)\,dx=4$ و $\int_{0}^{3}g(x)\,dx=3$ أوجد قيمة كل مما يلي:

1. $\int_{3}^{0}f(x)\,dx$.
2. $\int_{0}^{3}-2f(x)\,dx$.
3. $\int_{3}^{0}5f(x)\,dx$.
4. $\int_{0}^{3}\left(f(x)-g(x)\right)dx$.
5. $\int_{0}^{3}2\left(f(x)+g(x)\right)dx$.
6. $\int_{0}^{3}\left(3f(x)-5g(x)\right)dx$.
7. $\int_{3}^{0}\left(3f(x)-g(x)\right)dx$.

الحل:

1. $\int_{3}^{0}f(x)\,dx=-\int_{0}^{3}f(x)\,dx=-4$.

2. $\int_0^3 -2f(x)\,dx = -2\int_0^3 f(x)\,dx = -2(4) = -8$.

3. $\int_3^0 5f(x)\,dx = 5\int_3^0 f(x)\,dx = -5\int_0^3 f(x)\,dx$

$= -5(4) = -20$.

4. $\int_0^3 (f(x) - g(x))\,dx = \int_0^3 f(x)\,dx - \int_0^3 g(x)\,dx$

$= 4 - 3 = 1$.

5. $\int_0^3 2(f(x) + g(x))\,dx = 2\int_0^3 (f(x) + g(x))\,dx$

$= 2\left[\int_0^3 f(x)\,dx + \int_0^3 g(x)\,dx\right]$

$= 2[4 + 3] = 14$.

6. $\int_0^3 (3f(x) - 5g(x))\,dx = 3\int_0^3 f(x)dx - 5\int_0^3 g(x)dx$

$= 3(4) - 5(3) = 12 - 15 = -3$.

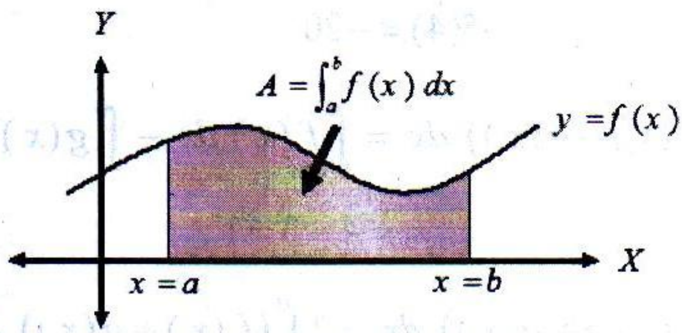
7. $\int_3^0 (3f(x) - g(x))\,dx = 3\int_3^0 f(x)\,dx - \int_3^0 g(x)\,dx$

$= -3\int_0^3 f(x)\,dx + \int_0^3 g(x)\,dx$

$= -3(4) + 3 = -12 + 3 = -9$.

(8 – 4) المساحة تحت المنحنى:

إن من أهم التطبيقات على التكامل المحدود أنه يستخدم في تعريف وإيجاد المساحة المحصورة بين منحنى الدالة ومحور x وبين قيمتين ثابتتين للدالة . انظر الشكل أدناه.



نرمز لهذه المساحة بالرمز A ، وتسمى بالمساحة تحت المنحنى بغض النظر ما إذا كان المنحنى فوق أو تحت محور X . لكن إذا كان المنحنى فوق محور x فإن المساحة هي قيمة تساوي التكامل المحدود.

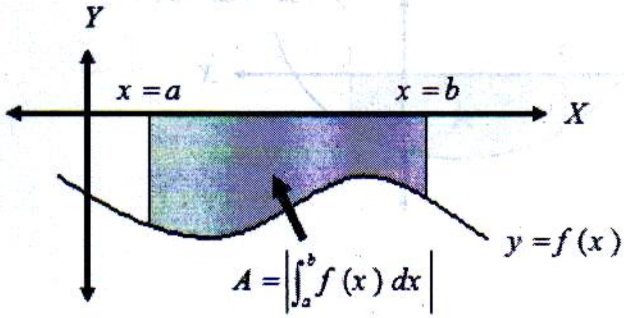
<u>المساحة تحت المنحنى:</u>

إذا كانت $f(x)$ دالة متصلة في الفترة $[a,b]$ وكانت $f(x) \geq 0$ لكل $x \in [a,b]$ فإن:

$$A = \int_a^b f(x)\,dx \ .$$

حيث A هي مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الدالة $f(x)$ ومحور x والمستقيمان $x = a$ و $x = b$.

وإذا كان منحنى الدالة تحت محور X كما في الشكل أدناه.



فإن قيمة التكامل المحدود للمنطقة المظللة سالبة وبما أن المساحة قيمة موجبة فإن المساحة A المحصورة بين منحنى الدالة ومحور x والمستقيمان $x = a$ و $x = b$ تعطى كالتالي:

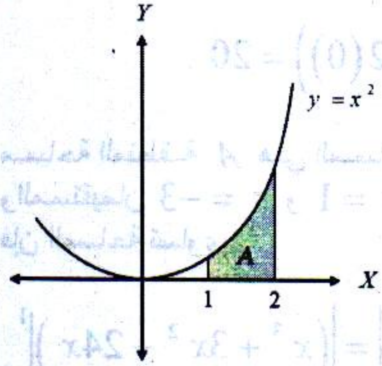
$$A = \left| \int_a^b f(x)\, dx \right| = -\int_a^b f(x)\, dx \ .$$

أي أن $A = \int_b^a f(x)\, dx$.

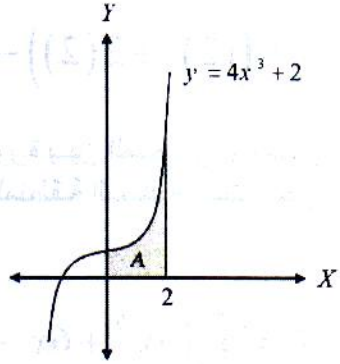
مثال (11):

في الأشكال التالية أوجد مساحة المنطقة المظللة A .

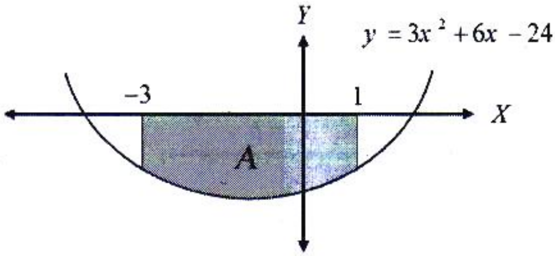
1.



2.



3.



الحل:

1. مساحة المنطقة A هي المساحة المحصورة بين المنحنى ومحور x والمستقيمان $x = 1$ و $x = 2$ وتساوي:

$$A = \int_1^2 x^2 \, dx = \tfrac{1}{3}x^3 \Big|_1^2$$

$$= \tfrac{1}{3}(2)^3 - \tfrac{1}{3}(1)^3 = \frac{8}{3} - \frac{1}{3} = \frac{7}{3} \, .$$

2. مساحة المنطقة A هي المساحة المحصورة بين المنحنى ومحور x والمستقيمان $x = 0$ و $x = 2$ وتساوي:

$$A = \int_0^2 \left(4x^3 + 2\right) \, dx = \left(x^4 + 2x\right)\Big|_0^2$$

$$= \left((2)^4 + 2(2)\right) - \left((0)^4 + 2(0)\right) = 20 \, .$$

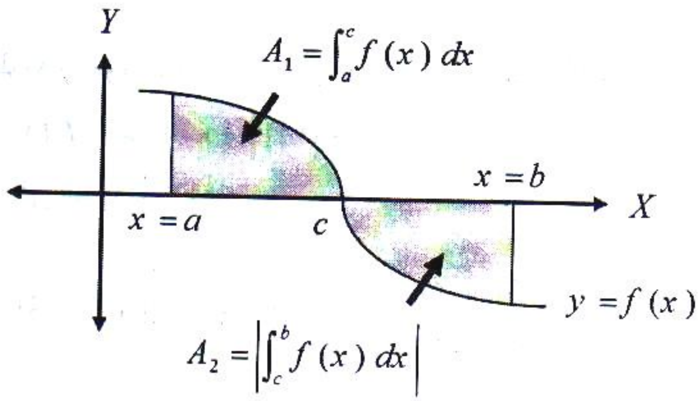
3. مساحة المنطقة A هي المساحة المحصورة بين المنحنى ومحور x والمستقيمان $x = -3$ و $x = 1$ وبما أن المنطقة المظللة تحت محور x فإن المساحة تساوي:

$$A = \left| \int_{-3}^1 \left(3x^2 + 6x - 24\right) \, dx \right| = \left| \left(x^3 + 3x^2 - 24x\right)\Big|_{-3}^1 \right|$$

$$= \left|\left((1)^3 + 3(1)^2 - 24(1)\right) - \left((-3)^3 + 3(-3)^2 - 24(-3)\right)\right|$$

$$= \left|-20 - 72\right| = 92 \ .$$

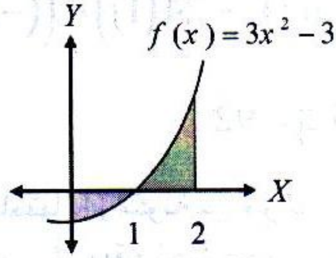
إذا كانت المنطقة المطلوب إيجاد مساحتها A مكونة من جزئين غير متداخلين أحدهم A_1 ويقع فوق محور X والآخر A_2 ويقع تحت محور X . كما في الشكل أدناه.



فإن $A = A_1 + A_2$ حيث قيمة المساحة الأولى A_1 هي $A_1 = \int_a^c f(x)\, dx$ (لأن $f(x) \ge 0$ لكل $x \in [a,c]$) . حيث العدد c صفر للدالة $f(x)$ (أي $f(c) = 0$) . وقيمة المساحة الثانية A_2 هي $A_2 = \left|\int_a^c f(x)\, dx\right|$ (لأن $f(x) \le 0$ لكل $x \in [c,b]$) . وبهذه الطريقة يمكن إيجاد مساحة جميع المنطقة.

مثال (12):

أوجد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الدالة $f(x) = 3x^2 - 3$ ومحور x والمستقيمان $x = 0$ و $x = 2$ كما في الشكل التالي:



الحل:

المنطقة المطلوبة والموضحة بالشكل مكونة من جزئين مساحة الجزء الأول وليكن A_1 حيث $f(x) \le 0$ في الفترة $[0,1]$ ومساحة الجزء الثاني وليكن A_2 حيث $f(x) \ge 0$ في الفترة $[1,2]$:

$$A_1 = \left| \int_0^1 f(x)\, dx \right| = \left| \int_0^1 \left(3x^2 - 3\right) dx \right| = \left| \left(x^3 - 3x\right)\Big|_0^1 \right|$$

$$= \left| \left((1)^3 - 3(1)\right) - \left((0)^3 - 3(0)\right) \right| = |-2| = 2 \ .$$

$$A_2 = \int_1^2 f(x)\, dx = \int_1^2 \left(3x^2 - 3\right) dx = \left(x^3 - 3x\right)\Big|_1^2$$

$$= \left((2)^3 - 3(2)\right) - \left((1)^3 - 3(1)\right) = 2 + 2 = 4 \ .$$

وعليه فإن المساحة المطلوبة هي:

$$A = A_1 + A_2 = 2 + 4 = 6 \ .$$

تمارين

1. في كل مما يلي تحقق ما إذا كانت الدالة $F(x)$ هي دالة أصلية للدالة $f(x)$ أم لا:

a) $F(x)=5x^2+6x-3 \quad , \quad f(x)=10x+6 .$

b) $F(x)=2x^4-3x^2+7 \quad , \quad f(x)=8x^3-6x+7 .$

c) $F(x)=\dfrac{5}{x^2-1} \quad , \quad f(x)=\dfrac{-10x}{x^2-1} .$

d) $F(x)=\sqrt{3x^2-x} \quad , \quad f(x)=\dfrac{6x-1}{2\sqrt{3x^2-x}} .$

2. أوجد التكامل غير المحدود في كل مما يلي:

a) $\int x^8\, dx .$ b) $\int 14x^{\frac{5}{7}}\, dx .$

c) $\int \sqrt[3]{x^2}\, dx .$ d) $\int \frac{1}{x^6}\, dx .$

e) $\int \frac{2}{x^3}\, dx .$ f) $\int \frac{4}{\sqrt{x}}\, dx .$

g) $\int \frac{1}{2\sqrt{x}}\, dx$.　　h) $\int \left(9x^2 - 10x + 5\right) dx$.

i) $\int x^3 \sqrt{x}\, dx$.　　j) $\int (x+2)^2\, dx$.

k) $\int x\left(2 + x^2\right) dx$.　　l) $\int (3-x)(x-1)\, dx$.

m) $\int \left(x^{-3} - 4x^{\frac{1}{4}}\right) dx$.　　n) $\int \left(x^2 - 1\right)\left(x^2 + 1\right) dx$.

o) $\int \frac{2-2x^3}{x^3}\, dx$.　　p) $\int \frac{x^2 - 2x^4}{x^4}\, dx$.

3. أوجد الدالة $F(x)$ حيث $F(x) = \int (6x-5)dx$ و $F(1) = 0$.

4. أوجد الدالة $F(x)$ حيث $F(x) = \int \sqrt[3]{x}\, dx$ و $F(1) = 2$.

5. احسب التكاملات المحدودة التالية:

a) $\int_5^{10} 6\, dx$.　　b) $\int_{-4}^{0} 2\, dx$.

c) $\int_{-2}^{-1} x\, dx$.　　d) $\int_0^3 2x\, dx$.

e) $\int_{-1}^{1} x^4 \, dx$.

f) $\int_{0}^{1} \left(x^3 - \frac{x}{2} + 2x\right) dx$.

g) $\int_{-1}^{2} x\left(1 + x^3\right) dx$.

h) $\int_{-1}^{0} \left(3x^2 - 4x + 7\right) dx$.

i) $\int_{0}^{2} (2 - 4x)\, dx$.

j) $\int_{1}^{2} \left(x^2 - 2x + 8\right) dx$.

k) $\int_{-1}^{2} (3x - 1)^2 \, dx$.

l) $\int_{2}^{2} x^2 \left(3x^4 - x^3\right)^5 dx$.

6. إذا كان $\int_{-1}^{2} f(x)\, dx = 5$ و $\int_{-1}^{2} g(x)\, dx = -3$ فاحسب كل مما يلي:

a) $\int_{2}^{-1} g(x)\, dx$.

b) $\int_{-1}^{2} 3\left(f(x) - g(x)\right) dx$.

c) $\int_{2}^{-1} -f(x)\, dx$.

d) $\int_{-1}^{2} \left(f(x) - 2g(x)\right) dx$.

e) $\int_{-1}^{2} -3f(x)\, dx$.

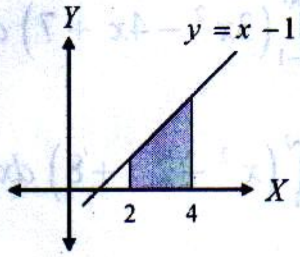
f) $\int_{2}^{-1} 4\left(g(x) - f(x)\right) dx$.

g) $\left(\int_{-1}^{2} 2f(x)\, dx\right)^2$.

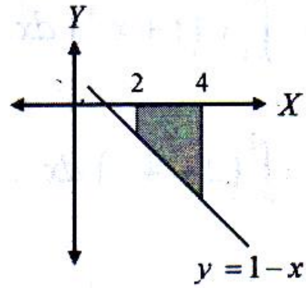
h) $\int_{2}^{-1} \left(3f(x) + 4g(x)\right) dx$.

7. في الأشكال التالية أوجد مساحة المنطقة المظللة:

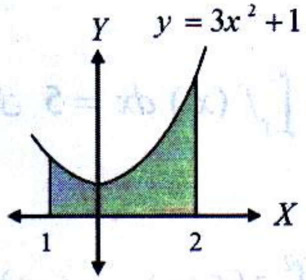
a)



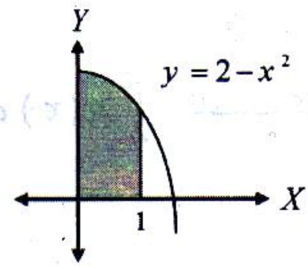
b)



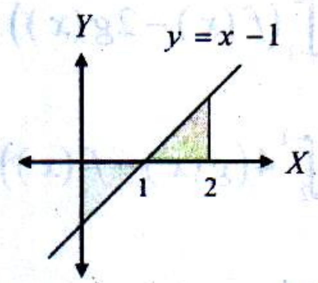
c)



d)



e)



f)

